IX Київський відкритий турнір математичних боїв ім. Лесі Рубльової

Перший тур

Умови задач

Молодша ліга. Група «А»

1. Знайдіть найменше число *x*, яке задовольняє нерівність $[x]\cdot\{x\}\geqslant 3$. Тут $[x]$ — ціла частина числа *x*, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує *x*, а $\{x\}=x-[x]$ — дробова частина числа *x*.

2. Набір із *n* попарно різних натуральних чисел (де $n\geqslant 1$) назвемо актуальним, якщо сума чисел набору, поділена на *n*, дорівнює 2012. При цьому порядок чисел ролі не грає і, наприклад, дві четвірки чисел {2010, 2011, 2013, 2014} та {2013, 2011, 2014, 2010} утворюють один і той самий актуальний набір чисел. Доведіть, що загальна кількість актуальних наборів скінченна й непарна.

3. Андрій, Богдан та Олеся якось сказали таке:

— Андрій: «Я живу більш ніж удвічі далі від Богдана, ніж від Олесі».

— Богдан: «Я живу більш ніж удвічі далі від Олесі, ніж від Андрія».

— Олеся: «Я живу більш ніж удвічі далі від Богдана, ніж від Андрія».

Хто з друзів міг сказати правду, якщо відомо, що чесними були принаймні двоє?

4. В опуклому чотирикутнику *ABCD* кути *A* та *C* рівні, а бісектриса кута *B* перетинає пряму *AD* в точці *P*. Пряма, що перпендикулярна до *BP* та проходить через точку *A*, перетинає пряму *BC* в точці *Q*. Доведіть, що $PQ\parallel CD$ (якщо прямі збігаються, ми також уважаємо їх паралельними).

5. Назвімо *n*-цифрове натуральне число всебічно розвиненим, якщо до нього можна дописати справа три різні цифри так, щоб усі три утворених $(n+1)$-цифрових числа були простими. Якого найменшого натурального значення може набути різниця двох усебічно розвинених чисел?

6. Натуральні числа *a*, *b*, *c*, *d* задовольняють рівність $a^2+b^2+ab=c^2+d^2+cd$. Доведіть, що число $a+b+c+d$ складене.

7. Двоє гравців грають на нескінченному в усі боки аркуші в клітинку. Вони ходять послідовно: перший гравець у вузлі сітки (тобто в місці перетину її ліній) ставить червону точку, а другий гравець — чорну. Ставити точку можна у довільний вузол, де ще не стоїть точка жодного з гравців. Перший гравець переможе, якщо після 2012 його ходів деякі чотири точки червоного кольору будуть утворювати вершини квадрата зі сторонами, що паралельні лініям сітки. Якщо після 2012-го ходу першого гравця на аркуші не буде таких чотирьох червоних точок, виграє другий гравець. Котрий із гравців зможе забезпечити собі перемогу у цій грі?

8. Кісточка доміно — це два суміжних квадрати, на яких записано цифри від 0 до 6. У наборі доміно 28 кісточок: 0|0, 0|1, 0|2, …, 0|6, 1|1, 1|2, …, 1|6, …, 6|6. Чи можна з деяких восьми із цих кісточок скласти магічний квадрат 4×4 за умови, що кісточки можна крутити й перегортати на 180°? Якщо скласти магічний квадрат можливо, то якому найменшому числу може дорівнювати сума всіх 16 цифр, записаних у квадраті?

Магічним квадратом називається квадратна табличка, що має таку властивість: суми чисел у кожному її рядку, стовпчику і на двох діагоналях однакові.

Молодша ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» молодшої ліги.*
2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*
3. *Задача № 3 групи «А» молодшої ліги.*
4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*
6. Знайдіть найменше натуральне число $m > 3$, що задовольняє такі умови: $m \vdots 3$, $m+1 \vdots 4$, $m+2 \vdots 5$, $m+3 \vdots 6$ і $m+4 \vdots 7$.

7. Десять монет трьох типів розклали так, як показано на рис. 1. Вартість монети кожного з трьох типів — ціле число копійок, причому монети одного типу мають однакову вартість. Про розкладені монети відомо таке:

- Якщо дві монети лежать поруч, вони мають різний тип.
- Загальна вартість монет, що лежать у кожному з чотирьох горизонтальних рядів, ділиться на 3.

Доведіть, що загальна вартість монет кожного з трьох типів ділиться на 3.

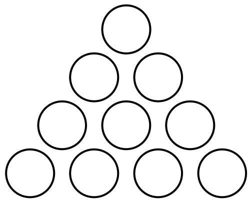

Рис. 1

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Молодша ліга. Сьомі класи

1. Розставте між числами знаки «+» та «–», щоб наведений вираз набув найменшого можливого значення:

$$|1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 998 \pm 999|.$$

2. Доведіть, що з довільних 8 попарно різних натуральних чисел, менших за 16, можна утворити три пари такі, що різниця чисел кожної пари буде однаковою. При цьому одне й те саме число може потрапити у дві або й в усі три вибрані пари.
3. *Задача № 3 групи «А» молодшої ліги.*
4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «Б» молодшої ліги.*
7. *Задача № 7 групи «Б» молодшої ліги.*
8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Середня ліга. Група «А»

1. Додатні числа *x, y* та *z* задовольняють умову $x + y + z = 1$. Доведіть, що

$$9xyz \leqslant xy + yz + zx < \frac{1}{4} + 3xyz.$$

2. Усі коефіцієнти многочлена $p(x)$ раціональні. Доведіть, що існує натуральне число n таке, що всі коефіцієнти многочлена $q(x) = p(x+n) - p(x)$ цілі.

3. У вписаному чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC є бісектрисою $\angle BAD$. На промені AD за точкою D вибрано точку E. Доведіть, що $CE = CA \iff DE = AB$.

4. Задано трикутник ABC із $\angle B \neq 90°$. Побудували два кола: перше з центром у вершині A, яке дотикається до прямої BC, а друге з центром у вершині C трикутника, яке дотикається до сторони AB. Кола перетинаються в точках M та N. Доведіть, що точки M, N та B лежать на одній прямій тоді й лише тоді, коли $AB = BC$.

5. Знайдіть усі натуральні числа *m, n* та прості числа *p*, для яких значення виразу

$\dfrac{5^m+2^n p}{5^m-2^n p}$ є точним квадратом.

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. Послідовність з n натуральних чисел a_1, a_2, …, a_n, $n \geqslant 2$, задовольняє умови: $a_k \leqslant k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, і $a_1+a_2+...+a_n$ — парне число. Доведіть, що існує такий набір чисел c_1, c_2, …, c_n, кожне з яких дорівнює 1 або -1, що справджується рівність $c_1a_1+c_2a_2+...+c_na_n=0$.

8. На площині позначили n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, та кожні дві сполучили відрізком червоного, зеленого чи синього кольору. Виявилося, що сторони кожного трикутника з вершинами у відмічених точках пофарбовані рівно у два різні кольори. Доведіть, що $n \leqslant 12$.

Середня ліга. Група «Б»

1. Додатні числа x, y та z задовольняють умову $x+y+z=1$. Доведіть нерівність

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. Доведіть, що для кожного натурального n, яке закінчується цифрою 5, значення виразу $20^n+15^n+8^n+6^n$ націло ділиться на 539.

7. *Задача № 7 групи «Б» молодшої ліги.*

8. Кожну клітинку квадрата 5×5 пофарбували в білий або в чорний колір таким чином, що жодну з фігур, зображених на рис. 2, не пофарбовано в один колір. Доведіть, що з чотирьох кутових клітин довільного квадрата 3×3 дві є чорними, а дві інші — білими.

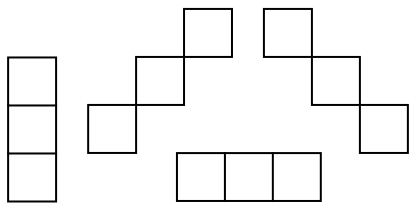

Рис. 2

Старша ліга. Група «А»

1. Для додатних чисел a, b, c, d, які задовольняють умову $ab+bc+cd+da=1$, доведіть нерівність

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}.$$

2. Для кожного непарного $p \geqslant 3$ знайдіть кількість коренів многочлена

$$f_p(x)=(x-1)(x-2)\cdot...\cdot(x-(p-1))+1.$$

3. У рівнобедреному трикутнику ортоцентр лежить на вписаному колі, радіус якого дорівнює $2\sqrt{5}$. Знайдіть сторони трикутника.

4. До кіл радіусів 1500 і 9 провели спільну зовнішню дотичну, і виявилось, що відстань між точками дотику дорівнює 2012. Яку найменшу довжину може мати ламана, кінці якої лежать на колах і яка перетинає проведену дотичну пряму?

5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*

6. Відомо, що многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами набуває значення 1 при чотирьох різних цілих значеннях аргументу *x*. Доведіть, що при жодному цілому значенні аргументу цей многочлен не дорівнює 2012.

7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» середньої ліги.*

Старша ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*
2. *Задача № 2 групи «А» старшої ліги.*
3. *Задача № 3 групи «А» старшої ліги.*
4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «А» старшої ліги.*
7. Чи існує замкнена просторова ламана, що має такі властивості:
- ламана не міститься цілком в одній площині;
- ламана має рівно 6 ланок;
- усі ланки ламаної мають однакову довжину;
- кути між сусідніми ланками ламаної однакові?

8. *Задача № 8 групи «Б» середньої ліги.*

Старша ліга. Група «В»

1. *Задача № 1 групи «Б» середньої ліги.*
2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*
3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*
4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «А» старшої ліги.*
7. *Задача № 7 групи «Б» старшої ліги.*
8. Усі точки кола пофарбовані у жовтий та синій кольори таким чином, що кожен вписаний у коло правильний трикутник має дві жовті вершини й одну синю. Доведіть, що існує вписаний у коло квадрат із щонайменше трьома жовтими вершинами.

Відповіді та розв’язання

Молодша ліга. Група «А»

1. ***Відповідь:*** 4,75.
Розв’язання. З означення цілої та дробової частин числа випливає, що незалежно від значення *x* справджується нерівність $0 \leqslant \{x\} < 1$. Якщо $x < 4$, то $[x] \leqslant 3$, тож $[x] \cdot \{x\} < 3$. Якщо $4 \leqslant x < 5$, то $[x] = 4$, а $[x] \cdot \{x\} \geqslant 3$ у тому й лише в тому випадку, коли $\{x\} \geqslant \frac{3}{4}$, тобто коли $x \geqslant 4\frac{3}{4} = 4{,}75$. Отже, найменшим значенням *x*, яке задовольняє умову, є число 4,75.

2. ***Розв’язання.*** Припустімо, деякий актуальний набір містить число *A*, більше за $4025 \cdot 2012$, а також інші $n-1$ число. Тоді сума *S* усіх чисел набору буде не меншою за

$$S \geqslant A + 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) = A + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Якщо поділити вираз на *n*, матимемо $\frac{S}{n} \geqslant \frac{A}{n} + \frac{n-1}{2} > \frac{4025 \cdot 2012}{n} + \frac{n-1}{2}$. Але цей вираз неодмінно більший за 2012, бо коли $n < 4025$, то $\frac{4025 \cdot 2012}{n} > 2012$, а коли $n \geqslant 4025$, то $\frac{n-1}{2} \geqslant 2012$.
Таким чином, усі актуальні набори складаються зі скінченної кількості чисел від 1 до щонайбільше $4025 \cdot 2012$, а отже їх теж скінченна кількість. Тепер доведемо, що кількість актуальних наборів непарна.
Неважко помітити, що коли актуальний набір із *n* чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ не містить числа 2012, то й набір із $n+1$ числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, 2012 також буде актуальним: якщо $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2012n$, то $a_1 + a_2 + ... + a_n + 2012 = 2012(n+1)$. І навпаки, якщо набір із $n+1$ числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, 2012 є актуальним і $n \geqslant 1$, то набір із *n* чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ також, очевидно, буде актуальним. Це означає, що всі актуальні набори за винятком набору, який складається з єдиного числа 2012, можна розбити на пари, такі що в кожній парі один із наборів збігається з іншим, коли до того приєднати число 2012. Якщо пар *k*, то загальна кількість актуальних наборів дорівнює $2k+1$, тобто є непарним числом.

3. ***Відповідь:*** правду сказали Андрій та Олеся.
Розв’язання. Позначивши через *A*, *B* та *O* точки, в яких розташовуються оселі відповідно Андрія, Богдана та Олесі, запишімо висловлювання друзів таким чином:

— Андрій: $AB > 2AO$.
— Богдан: $BO > 2AB$.
— Олеся: $BO > 2AO$.

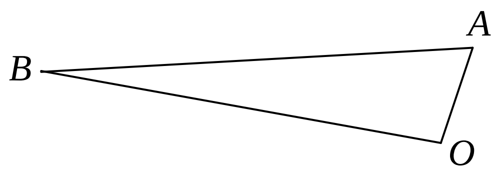

Рис. 3

Якщо справедливими є останні два твердження, то, додавши їх, отримаємо $2BO > 2AB + 2AO$, або $BO > AB + AO$, що суперечить нерівності трикутника для точок *A*, *B*, *O* (рис. 3). А якщо справджуються перше та друге твердження, то $AB + BO > 2AO + 2AB \ \Rightarrow\ BO > 2AO + AB > AO + AB$, що знову дає суперечність.
З іншого боку, перше й третє твердження справді можуть виконуватися водночас, якщо, наприклад, Андрій та Олеся живуть поруч, а Богдан мешкає дуже далеко від них (як показано на рис. 3).

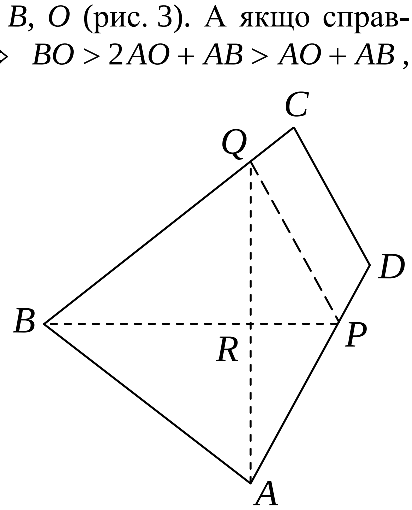

Рис. 4

4. ***Розв’язання.*** Позначимо через *R* точку перетину бісектриси *BP* кута *B* і перпендикулярної до неї прямої *AQ* (рис. 4). Зауважимо, що $90^\circ < \angle PBA + \angle BAD = \angle PBC + \angle BCD < 180^\circ$ (рис. 4), оскільки $(\angle PBA + \angle BAD) + (\angle PBC + \angle BCD) + \angle CDA = 360^\circ$ як сума кутів чотирикутника, а $\angle CDA < 180^\circ$. Це означає, що точка *P* лежить на промені *AD* (хоча й не обов’язково на відрізку *AD*), а точка *R* завжди лежить усередині відрізка *BP*. Крім того, очевидно, що точка *Q* лежить на промені *BC* (хоча й не обов’язково на відрізку *BC*) і *R*

завжди належить відрізку AQ. З наведеного вище випливає також і те, що точки P та Q лежать до точки перетину променів AD і BC, якщо ці промені перетинаються.
Тепер, незалежно від того, чи точки P та Q лежать усередині відрізків AD й BC, ми нарешті готові провести конструктивні міркування. За побудовою відрізок BR є водночас бісектрисою та висотою в ΔABQ, тому цей трикутник рівнобедрений, тобто $AB = QB$. Але тоді $\Delta ABP = \Delta QBP$ за двома сторонами та кутом між ними, звідки $\angle BQP = \angle BAP = \angle BCD$, а тому $PQ \parallel CD$ як прямі, що утворюють рівні кути з BC.

5. ***Відповідь:*** 3.
Розв'язання. Останніми цифрами неодноцифрового простого числа можуть бути лише 1, 3, 7 або 9 (інакше число ділиться на 2 чи на 5). Нехай N — усебічно розвинене число. Тоді з чотирьох чисел $10N+1$, $10N+3$, $10N+7$ та $10N+9$ принаймні три мають бути простими, а складеним, відповідно, буде щонайбільше одне число. Але якщо $N = 3k$, де k натуральне, то числа $10N+3$ та $10N+9$ не можуть бути простими, бо діляться на 3. А якщо $N = 3k-1$, то на 3 ділитимуться $10N+1 = 30k-9$ та $10N+7 = 30k-3$. Це означає, що кожне всебічно розвинене число у разі ділення на 3 дає остачу 1, а значить, різниця двох таких чисел не може бути меншою за 3.
У той же час бути рівною 3 різниця двох усебічно розвинених чисел дійсно може. Наприклад, числа 4 та 1, різниця яких дорівнює 3, є всебічно розвиненими, бо трійки 11, 13 і 17 та 41, 43, 47 є простими числами.

6. ***Розв'язання.*** Нехай $a+b+c+d = n \geqslant 4$. Тоді $d \equiv -(a+b+c) \pmod n$. Підставивши це в конгруенцію $a^2+b^2+ab \equiv c^2+d^2+cd \pmod n$, яка безпосередньо випливає з умови, матимемо:

$$a^2+b^2+ab \equiv c^2+(a+b+c)^2 - c(a+b+c) \pmod n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+ab-c^2-(a+b+c)(a+b) \equiv 0 \pmod n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+ab-c^2-a^2-ab-ac-ab-b^2-bc \equiv 0 \pmod n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -c^2-ac-ab-bc \equiv 0 \pmod n \Rightarrow (a+c)(b+c) \equiv 0 \pmod n.$$

Оскільки числа $a+c = n-(b+d) < n$ та $b+c = n-(a+d) < n$ натуральні й менші за n, а їхній добуток, як ми показали, ділиться на n, число n не може бути простим.

7. ***Відповідь:*** виграє перший гравець.
Розв'язання. Запровадимо на аркуші декартову систему координат так, щоб вузли сітки збігалися з точками, обидві координати яких — цілі числа. Укажемо виграшну стратегію для першого гравця. Своїм першим ходом він поставить червону точку у вузол (0, 0). Якщо другий гравець поставить чорну точку у вузол із координатами (a, b), перший гравець повинен відповісти, поставивши червону точку у вузол $(k, 0)$, де $k = \max\{|a|, |b|\}+1$. На рис. 5 показано приклад розташування двох червоних точок із координатами (0, 0) і $(k, 0)$ і чорної точки з координатами (a, b), а штриховою лінією позначено осі $y = 0$ та $x = \dfrac{k}{2}$, відносно яких розташування червоних точок симетричне.

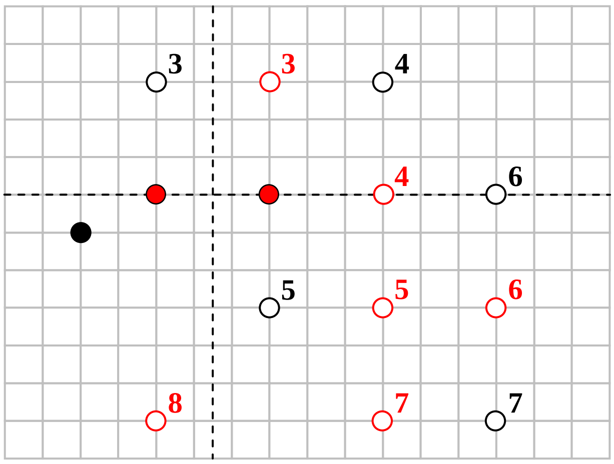

Рис. 5

Вузли, які позначені на рис. 5 незафарбованими кружечками, будемо називати корисними вузлами. Припустімо спершу, що другим своїм ходом другий гравець поставить чорну точку у вузол, відмінний від усіх корисних. Поставлена під час першого ходу чорна точка також не може збігатися з жодним із корисних вузлів з огляду на те, що відстань k ми спеціально для цього вибрали достатньо великою. Тоді третім своїм ходом перший гравець має поставити точку у вузол, позначений на рис. 5 червоною цифрою 3. Якщо другий гравець відразу ж після цього не походить у вузол, позначений чорною цифрою 3, перший гравець зможе зробити це сам, унаслідок чого чотири червоні точки стануть вершинами квадрата зі стороною k. Якщо ж другий гравець таки походить у вузол, позначений чорною трійкою, перший повинен походити у вузол, біля якого на рисунку сто-

їть червона четвірка. З аналогічних міркувань другий повинен ходити у вузол із чорною четвіркою. Далі гравці будуть ставити точки у вузлах із п'ятірками, шістками й сімками (перший гравець робитиме це за стратегією, а другий — вимушено). Але тоді восьмим своїм ходом перший гравець зможе поставити точку так, щоб утворився квадрат зі стороною $2k$ (див. рис. 5).
Тепер лишається зауважити, що під час свого третього ходу перший гравець має чотири симетричні способи поставити червону точку (йдеться про симетрію відносно двох уже поставлених червоних точок). Тож у випадку, коли другу чорну точку поставлено в один з корисних вузлів, першому гравцю достатньо вибрати один з інших трьох варіантів, для якого жоден із вузлів в альтернативному симетричному розташуванні не є зайнятим. Це завжди можливо зробити, бо, як видно, для кожного корисного вузла хоча б одна з чотирьох (або — для вузлів на осі $y=0$ — двох) відповідних йому симетричних точок не є корисним вузлом.
Таким чином, уже щонайбільше за 8 ходів перший гравець зможе забезпечити наявність квадрата з вершинами у червоних точках.

8. ***Відповідь:*** можна; найменша можлива сума — 20.
Розв'язання. Приклад магічного квадрата слід сконструювати безпосередньо. Можливий варіант показано на рис. 6. Сума чисел у кожному рядку, стовпчику й на обох діагоналях зображеного квадрата дорівнює 5, а сума всіх записаних у ньому чисел — $4 \cdot 5 = 20$.
Із 28 кісточок доміно найменшу суму цифр 0 має, очевидно, кісточка 0|0. Ще одна кісточка (0|1) має суму 1, дві кісточки (0|2 і 1|1) мають суму 2, ще дві кісточки (0|3 та 1|2) мають суму 3 і три кісточки (0|4, 1|3 і 2|2) мають суму 4. Отже, на восьми кісточках із найменшими сумами цифр загалом $0+1+2+2+3+3+4+4=19$ очок. Але, виходячи з означення магічного квадрата, сума чисел у квадраті 4×4 має ділитися на 4, тому дорівнювати 19 не може. Значить, найменша можлива сума цифр дорівнює 20.

2	**1**	**1**	**1**
3	**1**	**1**	**0**
0	**3**	**0**	**2**
0	**0**	**3**	**2**

Рис. 6

Молодша ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» молодшої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» молодшої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. ***Відповідь:*** 423**.**
Розв'язання. Нехай $M = m-3$. Оскільки за умовою $m>3$, число M повинно бути натуральним. Умову $m \vdots 3$ можна переписати як $M+3 \vdots 3$, тому $M \vdots 3$. Аналогічно з $m+1 \vdots 4$ випливає, що $M+4 \vdots 4$, тобто $M \vdots 4$. Так само $M \vdots 5$, $M \vdots 6$ і $M \vdots 7$. Отже, M ділиться на найменше спільне кратне чисел 3, 4, 5, 6 і 7, тобто на число $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Це означає, що $M \geqslant 420$, а $m = M+3 \geqslant 423$. З іншого боку, як тепер нескладно перевірити, число 423 справді задовольняє умову задачі, тож це число і є шуканим.

7. ***Розв'язання.*** Позначимо три типи монет через А, Б та В. Без обмеження загальності можемо вважати, що верхня монета має тип А (рис. 7). Дві монети у другому горизонтальному ряді за умовою повинні мати різні типи, до того ж відмінні від типу А. Нехай перша з них має тип Б, а друга — В. Тепер зі схожих міркувань випливає, що середня монета третього ряду повинна мати тип А, але тоді перша монета третього ряду — монета типу В, а остання — монета типу Б. Так само відновлюються типи монет у нижньому ряді — див. рис. 7.

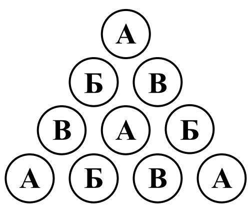

Рис. 7

З умови задачі випливає, що вартість монети у верхньому ряді трикутника, тобто вартість однієї монети типу А, ділиться на 3. Тоді й сумарна вартість усіх монет типу А в трикутнику ділиться на 3. Монет типів Б та В по 3, тому загальні вартості монет цих типів також діляться на 3.

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Молодша ліга. Сьомі класи

1. ***Розв'язання.*** Розставмо знаки, приміром, так:
$|(1+2-3)+(4-5-6+7)+(8-9-10+11)+...+(992-993-994+995)+(996-997-998+999)|=0$.
А меншим за 0 значення модуля бути, як відомо, не може.

2. ***Розв'язання.*** Із восьми чисел можна утворити $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ пар. А можливих значень для різниці двох натуральних чисел, менших за 16, є 14: усі числа від 1 до $15-1=14$. Це означає, що або якась різниця трапляється тричі, або кожну різницю дають рівно дві пари чисел. Утім, останній варіант не є можливим, бо різницю 14 може дати тільки одна пара чисел (15, 1). Отже, одну з різниць мають принаймні три різні пари.

3. *Задача № 3 групи «А» молодшої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «Б» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «Б» молодшої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Середня ліга. Група «А»

1. ***Розв'язання.*** Для доведення першої нерівності скористаймося співвідношенням між середнім геометричним та середнім арифметичним трьох чисел:

$$xyz=\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)}\cdot\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{xy+yz+zx}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3}=\frac{xy+yz+zx}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{xy+yz+zx}{9}.$$

Тепер доведімо другу нерівність. Принаймні одна з трьох змінних буде не меншою за одну третю, бо інакше їхня сума була б меншою від одиниці. Нехай, без утрати загальності, $z\geqslant\frac{1}{3}$. Тоді

$$xy+yz+zx-3xyz=xy(1-3z)+z(x+y)\leqslant z(x+y)\leqslant\left(\frac{z+(x+y)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

До того ж рівність можлива лише за умов $xy(1-3z)=0$ і $z=x+y$. Це означало б, що водночас $z=\frac{1}{3}$ і $z=\frac{1}{2}$, чого, звичайно, бути не може.

2. ***Розв'язання.*** Нехай $p(x)=\frac{a_m}{b_m}x^m+\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}x^{m-1}+...+\frac{a_1}{b_1}x+\frac{a_0}{b_0}=\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{b_k}x^k$, де $m\geqslant 0$, $a_k\in\mathbb{Z}$, $b_k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant k\leqslant m$. Тоді

$$p(x+n)-p(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{b_k}(x+n)^k-\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{b_k}x^k=\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{b_k}((x+n)^k-x^k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{b_k}(C_k^1x^{k-1}n+C_k^2x^{k-2}n^2+...+C_k^kx^0n^k)=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{b_k}\cdot n(C_k^1x^{k-1}+C_k^2x^{k-2}n+...+C_k^kx^0n^{k-1}).$$

Таким чином, якщо покласти, приміром, $n=b_1b_2...b_m$, то

$$p(x+n)-p(x)=\sum_{k=1}^{m} a_k b_1 b_2 ... b_{k-1} b_{k+1} ... b_m (C_k^1 x^{k-1} + C_k^2 x^{k-2} n + ... + C_k^k x^0 n^{k-1}),$$

тобто $p(x+n)-p(x)$ є сумою многочленів з цілими коефіцієнтами, а отже й сам має цілі коефіцієнти.

3. ***<u>Розв'язання.</u>*** З рівності кутів $\angle BAC = \angle DAC$ (рис. 8) випливає, що $BC = DC$: однакові кути в колі стягують рівні хорди. Крім того, $\angle ABC = 180° - \angle ADC = \angle EDC$.
Якщо $AB = ED$, то $\Delta ABC = \Delta EDC$ за двома сторонами та кутом між ними. Тоді маємо рівність третіх сторін трикутників $AC = EC$.
Навпаки, якщо $AC = EC$, то $\angle CED = \angle CAD = \angle CAB$, що разом із рівністю $\angle ABC = \angle EDC$ дає рівність трикутників $\Delta ABC = \Delta EDC$ за трьома кутами та стороною $AC = EC$. Тоді $AB = ED$.

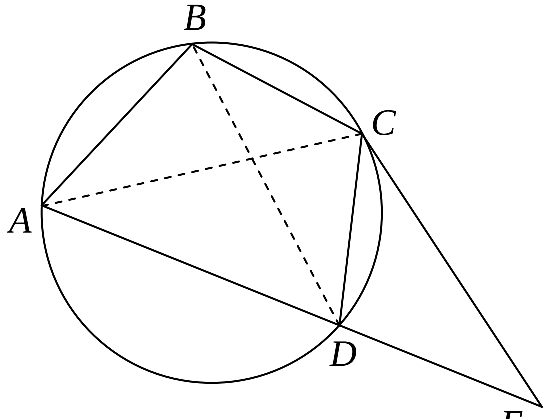

Рис. 8

4. ***<u>Розв'язання.</u>*** Як відомо, пряма, що проходить через точки перетину двох кіл, перпендикулярна до прямої, що проходить через їхні центри, тому $MN \perp AC$ (рис. 9).
І для вершини *A*, і для вершини *C* трикутника існує лише одне коло з центром у цій вершині, яке дотикається до прямої, що містить протилежну сторону. Тому якщо трикутник *ABC* рівнобедрений і $AB = BC$, то пряма *MN* з міркувань симетрії не може проходити повз вершину *B*.
Нехай тепер точки *M, N* та *B* лежать на одній прямій. Позначмо через *D, E* та *F* основи висот, опущених із вершин *A, B* й *C* трикутника відповідно. Оскільки $MN \perp AC$, точка *E* належить прямій *MN*. Тоді

$$AB^2 - CB^2 = (AE^2 + EB^2) - (CE^2 + EB^2) = AE^2 - CE^2 =$$
$$= (AN^2 - EN^2) - (CN^2 - EN^2) = AN^2 - CN^2.$$

Використавши, що $AN = AD$ і $CN = CF$ (точки *D* та *F* лежать на відповідних колах), маємо:

$$AB^2 - CB^2 = AN^2 - CN^2 = AD^2 - CF^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BD^2 = AB^2 - AD^2 = CB^2 - CF^2 = BF^2.$$

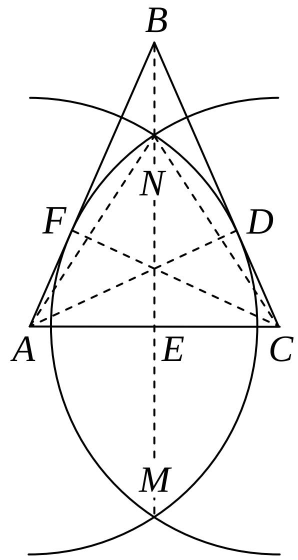

Рис. 9

Прямокутні трикутники *ABD* та *CBF* мають однакові гострі кути *B*: кут спільний, якщо $\angle ABC$ гострий, або кути вертикальні, якщо $\angle ABC$ тупий. Крім того, як ми показали, катети цих трикутників *BD* й *BF* рівні, тому рівними є й самі трикутники, звідки випливає рівність їхніх гіпотенуз $AB = BC$.

5. ***<u>Відповідь:</u>*** $(m, n, p) \in \{(1,1,2), (2,3,3), (2,2,5)\}$.

<u>Розв'язання.</u> Нехай $\dfrac{5^m + 2^n p}{5^m - 2^n p} = k^2$ для деякого цілого *k*. Тоді $5^m + 2^n p = k^2(5^m - 2^n p)$, звідки $2 \cdot 5^m = (5^m + 2^n p) + (5^m - 2^n p) = (k^2+1)(5^m - 2^n p) \Rightarrow 2 \cdot 5^m \,\vdots\, 5^m - 2^n p$. А оскільки число $5^m - 2^n p$ непарне, то й $5^m \,\vdots\, 5^m - 2^n p$. Звідси, враховуючи, що $5^m - 2^n p$ має бути додатним числом, маємо, що $5^m - 2^n p = 5^r$ для деякого невід'ємного цілого *r*.

Припустимо спершу, що $r = 0$, тобто $5^m - 2^n p = 1$. Тоді:

— Якщо $n = 1$, то $4p = (5^m + 2p) - (5^m - 2p) = k^2 - 1 \Rightarrow k = 2l + 1,\ l \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = l(l+1)$, звідки, враховуючи, що *p* просте, $p = 2 \Rightarrow m = 1$.

— Якщо $n = 2$, то $8p = (5^m + 4p) - (5^m - 4p) = k^2 - 1 \Rightarrow k = 2l + 1,\ l \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2p = l(l+1)$, звідки, враховуючи, що *p* просте, $p = 3 \Rightarrow 5^m = 13$ — суперечність.

— Якщо $n \geqslant 3$, то $5^m \equiv 1 \pmod 8$, тому $m = 2s,\ s \in \mathbb{N} \Rightarrow 5^m = 5^{2s} \equiv 1 \pmod 3$. А тоді $2^n p \equiv 0 \pmod 3$. Ураховуючи, що *p* просте, маємо $p = 3 \Rightarrow 5^m - 1 = (5^s - 1)(5^s + 1) = 3 \cdot 2^n$.

Оскільки $5^s+1 \equiv 2 \pmod 4$, то при $s>1$ число 5^s+1 має непарні дільники, більші за 3. Але число $3\cdot 2^n$ таких дільників мати не може, тому можливим є тільки випадок $s=1$, $m=2$, $n=3$.

Нехай тепер $r \geqslant 1$. З рівності $5^m - 2^n p = 5^r$ випливає, що $2^n p \,\vdots\, 5 \Rightarrow p=5$. Тоді рівність можна переписати як $5^{m-1}-2^n=5^{r-1}$. Зрозуміло, що $m>1$, бо інакше ліва частина рівності була б від'ємною. Якби й r було більшим за 1, то мали б, що $2^n \,\vdots\, 5$, чого бути не може. Отже, $r=1$, а $5^{m-1}-2^n=1$.

— Якщо $n=1$, то $5^{m-1}=3$. Суперечність.
— Якщо $n=2$, то $5^{m-1}=5 \Rightarrow m=2$.
— Якщо $n \geqslant 3$, то $5^{m-1} \equiv 1 \pmod 8$ тому $m-1=2s$, $s\in\mathbb{Z}$, $s \geqslant 0 \Rightarrow 5^{m-1}-1=(5^s-1)(5^s+1)=2^n$. Оскільки $5^s+1 \equiv 2 \pmod 4$, то при $s>0$ число 5^s+1 має непарні дільники, більші за 1. Але число 2^n таких дільників мати не може, тому можливим є тільки випадок $s=0$, який дає $2^n=0$ і теж призводить до суперечності.

Залишається шляхом перевірки переконатися, що всі три отримані під час розв'язання варіанти справді задовольняють умову задачі.

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. ***Розв'язання.*** Доведемо це твердження методом математичної індукції. Для $n=2$ умову задачі задовольняють тільки числа $a_1=a_2=1$. Тоді можна покласти, наприклад, $c_1=1$ і $c_2=-1$.

Нехай твердження доведене для всіх n з проміжку $2 \leqslant n \leqslant m$. Доведемо його для $n=m+1$ і набору $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m+1}$. Для цього розглянемо три випадки.

Спершу припустимо, що $a_{m+1}>a_m$, та розглянемо набір з m чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m-1},\ a_{m+1}-a_m$. Цей набір задовольняє умову задачі для $n=m$, бо $1 \leqslant a_{m+1}-a_m \leqslant (m+1)-1=m$, а сума $a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+(a_{m+1}-a_m)=a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+a_m+a_{m+1}-2a_m$ має ту саму парність, що й $a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+a_m+a_{m+1}$, тобто парна. Тому існує такий набір чисел $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m$, що $c_1a_1+c_2a_2+\ldots+c_{m-1}a_{m-1}+c_m(a_{m+1}-a_m)=0$. Тоді набір з $m+1$ числа $c_1'=c_1,\ c_2'=c_2,\ \ldots,\ c_{m-1}'=c_{m-1}$, $c_m'=-c_m$, $c_{m+1}'=c_m$ буде шуканим для $n=m+1$.

Якщо $a_{m+1}<a_m$, міркування аналогічні. Ми розглядаємо набір з m чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m-1},\ a_m-a_{m+1}$. Цей набір задовольняє умову задачі для $n=m$, бо $1 \leqslant a_m-a_{m+1} \leqslant m-1<m$, а сума $a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+(a_m-a_{m+1})=a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+a_m+a_{m+1}-2a_{m+1}$ має ту саму парність, що й $a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+a_m+a_{m+1}$, тобто парна. Тому існує такий набір чисел $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m$, що $c_1a_1+c_2a_2+\ldots+c_{m-1}a_{m-1}+c_m(a_m-a_{m+1})=0$. Тоді набір з $m+1$ числа $c_1'=c_1,\ c_2'=c_2,\ \ldots,\ c_{m-1}'=c_{m-1}$, $c_m'=c_m$, $c_{m+1}'=-c_m$ буде шуканим для $n=m+1$.

Нехай тепер $a_{m+1}=a_m$. У такому випадку можемо стверджувати, що $m>2$, бо за умови $m=2$ сума $a_1+a_2+a_3=1+2a_2$ була б непарною. За припущенням індукції для $n=m-1$ існує набір $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{m-1}$, для якого $c_1a_1+c_2a_2+\ldots+c_{m-1}a_{m-1}=0$. Тоді набір з $m+1$ числа $c_1'=c_1,\ c_2'=c_2,\ \ldots,\ c_{m-1}'=c_{m-1}$, $c_m'=1$, $c_{m+1}'=-1$, як неважко зрозуміти, буде шуканим для $n=m+1$.

8. ***Розв'язання.*** Нехай із деякої точки виходить принаймні 6 відрізків одного кольору до точок A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 і A_6. Тоді жодні дві з цих точок не можуть бути сполучені відрізком того самого кольору, бо інакше утворився б однокольоровий трикутник. Отже, всі відрізки між парами точок A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 і A_6 розфарбовані в один із двох кольорів — припустімо, в зелений і синій. Розгляньмо точку A_1. Із неї виходять 5 відрізків у A_2, A_3, A_4, A_5 і A_6. Хоча б 3 з цих відрізків повинні бути пофарбовані однаково. Хай, без утрати загальності, це відрізки до A_2, A_3 та A_4 і вони пофарбовані в зелений колір. Тоді відрізок A_2A_3 має бути синім, бо інакше $A_1A_2A_3$ — зелений трикутник. Аналогічно синіми мають бути A_2A_4 і A_3A_4. Але тоді трикутник $A_2A_3A_4$ повністю синій, що також суперечить умові задачі. Таким чином, із жодної точки не виходить більш ніж 5 відрізків одного кольору і, відповідно, більш ніж 15 відрізків усіх трьох кольорів. Це означає, що кількість точок n не перевищує 16.

Нехай тепер $13 \leqslant n \leqslant 16$. Назвімо гарною пару відрізків, що виходять з однієї точки та мають різний колір. Кожна гарна пара відрізків належить, очевидно, тільки одному трикутнику, а кожен трикутник із вершинами у відмічених точках містить рівно дві гарні пари відрізків, бо за умовою розфарбований рівно у два різних кольори. Звідси випливає, що загальна кількість гарних пар складає

$$S = 2 \cdot C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

Тепер спробуємо підрахувати кількість гарних пар в інший спосіб. Якщо з деякої точки виходить x червоних, y зелених і z синіх відрізків (де $x+y+z=n-1$), то гарних пар відрізків, що виходять із даної точки, є $xy+yz+zx$. Ця кількість набуватиме найменшого значення у випадку, коли дві змінні дорівнюють по 5, а третя — $n-11$: якщо дві змінні водночас не дорівнюють 5, більшу з них збільшимо на 1, а меншу на 1 зменшимо, при цьому зменшивши значення виразу $xy+yz+zx$. Якщо, наприклад, $x \leqslant y < 5$, то $y+1 \leqslant 5$, $x = n-1-y-z \geqslant n-1-5-5 \geqslant 2$, тому $x-1>0$, а

$$(x-1)(y+1)+(y+1)z+z(x-1) = xy+yz+zx+(x-y-1) < xy+yz+zx.$$

Отже, кількість гарних пар відрізків, що виходять з однієї точки, не може бути меншою за $xy+yz+zx \geqslant 5\cdot 5+5(n-11)+5(n-11)=10n-85$, а загальна кількість гарних пар, відповідно, не менша за $n(10n-85)$. Тож маємо співвідношення:

$$S = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \geqslant n(10n-85) \iff (n-1)(n-2) \geqslant 3(10n-85) = 30n-255 \iff n^2-33n+257 \geqslant 0.$$

Оскільки $33^2 - 4\cdot 257 = 61$, це означає, що або $n \leqslant \frac{33-\sqrt{61}}{2} < 13$, або $n \geqslant \frac{33+\sqrt{61}}{2} > 16$. Те, що випадок $n > 16$ неможливий, показано вище. Отже, $n \leqslant 12$.

Середня ліга. Група «Б»

1. ***Розв'язання.*** Проведемо такі перетворення:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = 1+\frac{xy+yz+zx}{xyz}+\frac{x+y+z}{xyz}+\frac{1}{xyz} \geqslant 1+\frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{xyz}+\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{xyz}+\frac{1}{xyz} =$$

$$= 1+\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}+\frac{1}{xyz} = \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^3 \geqslant \left(1+\frac{3}{x+y+z}\right)^3 = 4^3 = 64.$$

2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. ***Розв'язання.*** Розкладемо заданий вираз на множники: $20^n+15^n+8^n+6^n = (5^n+2^n)(4^n+3^n)$. За умовою $n = 10k+5 = 5(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, тому

$$5^n+2^n = 5^{5(2k+1)}+2^{5(2k+1)} = (5^5)^{2k+1}+(2^5)^{2k+1} \;\vdots\; 5^5+2^5 = 3157 = 7\cdot 11\cdot 41.$$

Аналогічно

$$4^n+3^n = 4^{5(2k+1)}+3^{5(2k+1)} = (4^5)^{2k+1}+(3^5)^{2k+1} \;\vdots\; 4^5+3^5 = 1267 = 7\cdot 181.$$

Значить, добуток цих чисел ділиться на $539 = 7\cdot 7\cdot 11$.

7. *Задача № 7 групи «Б» молодшої ліги.*

8. ***Розв'язання.*** Припустимо спершу, що в деякому квадратику 3×3 усі кутові клітини одного кольору — приміром, чорного (рис. 10). Позначимо клітинку на перетині *i*-го рядка та *j*-го стовпчика цього квадрата через (*i*, *j*). Клітинки (1, 2), (2, 1), (2, 3) і (3, 2) мають бути білими, бо інакше утвориться горизонталь або вертикаль із трьох чорних клітинок. Центральна клітинка (2, 2) також має бути білою, бо інакше утвориться діагональ із трьох чорних клітинок. Але в такому випадку утворюються горизонталь і вертикаль із трьох білих клітинок, що також суперечить умові. Отже, всі чотири кутові клітини квадрата 3×3 не можуть мати один і той самий колір.

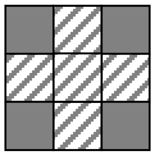

Рис. 10

Нехай тепер три кутові клітини деякого квадратика 3×3 чорні, а одна — біла. Без утрати загальності можемо вважати, що вони розташовуються, як показано на рис. 11. Знову позначимо кожну клітинку через (*i*, *j*) так, як робили це вище. Клітинки (1, 2), (2, 1) і (2, 2) мають бути білими, щоб не утворилося відповідно горизонталі, вертикалі або діагоналі з трьох чорних клітинок. А тоді клітинки (2, 3) і (3, 2) повинні бути чорними, щоб не утворилося відповідно білої горизонталі або вертикалі. Маємо розфарбування, зображене на рис. 12.

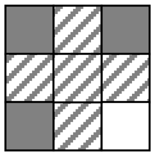

Рис. 11

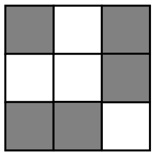

Рис. 12

Якби над квадратиком був іще один рядок, то клітина над клітинкою (1, 3) квадрата не могла б бути пофарбована ні в чорний колір (щоб не утворити чорної вертикалі), ні в білий (щоб не утворити білої діагоналі). А якби зліва від квадратика був іще один стовпчик, то те саме можна було б сказати про клітину зліва від клітинки (3, 1). Тому квадрат 3×3, який ми розглядаємо, повинен розташовуватися у верхньому лівому куті квадрата 5×5.

Перед тим як міркувати далі, у природний спосіб поширимо нотацію (*i*, *j*) на решту клітин великого квадрата. Припустимо, що клітинка (4, 2) чорна (рис. 13). Тоді клітинки (5, 2) і (5, 3) повинні бути білими, щоб не утворилося відповідно чорної вертикалі та діагоналі. Тепер клітинка (5, 4) має бути чорною, щоб із (5, 2) та (5, 3) не утворити білої горизонталі. Але в такому разі клітинка (4, 3) не може бути чорною, щоб не утворити чорної діагоналі, і водночас не може бути білою, щоб не утворити білої вертикалі з клітинками (3, 3) і (5, 3). Суперечність. Отже, клітинка (4, 2) біла. Оскільки рис. 12 симетричний відносно діагоналі, що йде з лівого верхнього кута квадрата у правий нижній, шляхом аналогічних міркувань вдасться отримати й те, що білою є клітинка (2, 4), симетрична до (4, 2). Але тоді клітинки (4, 2), (3, 3) і (2, 4) утворюють білу діагональ. Дістали суперечність.

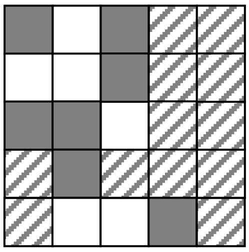

Рис. 13

Насамкінець зауважимо, що розфарбування, яке задовольняє умову задачі, справді існує. Приклад такого розфарбування наведено на рис. 14.

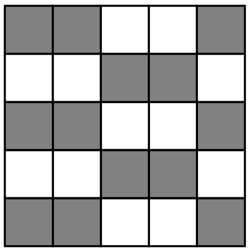

Рис. 14

Старша ліга. Група «А»

1. ***Розв'язання.*** Експериментуючи з набором чисел та коефіцієнтами перед ними для застосування нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним, отримаємо зокрема таке:

$$\frac{36a^3}{b+c+d}+2(b+c+d)+6a+3\geqslant 4\cdot\sqrt[4]{\frac{36a^3}{b+c+d}\cdot 2(b+c+d)\cdot 6a\cdot 3}=24a.$$

Якщо знайти суму подібних виразів для всіх чотирьох циклічних перестановок змінних, матимемо

$$\frac{36a^3}{b+c+d}+\frac{36b^3}{c+d+a}+\frac{36c^3}{d+a+b}+\frac{36d^3}{a+b+c}+6(a+b+c+d)+6(a+b+c+d)+12\geqslant 24(a+b+c+d),$$

звідки

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{12(a+b+c+d)-12}{36}=\frac{a+b+c+d-1}{3}.$$

Тепер достатньо було б показати, що $a+b+c+d\geqslant 2$. А це справді так, тому що

$$(a+b+c+d)^2-4(ab+bc+cd+da)=(a-b+c-d)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^2\geqslant 4(ab+bc+cd+da)=4.$$

2. ***Відповідь:*** якщо $p=3$, коренів немає; якщо $p=5$, коренів два; якщо $p\geqslant 7$, коренів $p-1$.

Розв'язання. Спершу розглянемо випадки $p=3$ і $p=5$:

— $f_3(x)=(x-1)(x-2)+1=x^2-3x+3>0$ — при $p=3$ коренів немає.

— $f_5(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$. Оскільки точки $x-1$, $x-2$, $x-3$ та $x-4$ симетричні відносно точки $x-\frac{5}{2}$, можемо зробити заміну $t=x-\frac{5}{2}$, яка спростить рівняння:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1=0 \Leftrightarrow \left(t+\frac{3}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2-\frac{1}{4}\right)\left(t^2-\frac{9}{4}\right)+1=0 \Leftrightarrow t^4-\frac{5}{2}t^2+\frac{25}{16}=0 \Leftrightarrow \left(t^2-\frac{5}{4}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=t+\frac{5}{2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Отже, якщо $p=5$, многочлен має два корені.

Нехай тепер $p\geqslant 7$. Очевидно, що $f_p(1)=f_p(2)=...=f_p(p-1)=1$. Нижче ми покажемо, що $f_p(2k-1/2)<0$, $k=1,2,...,\frac{p-1}{2}$. Оскільки $f_p(2k-1)=1>0$ і $f_p(2k)=1>0$, це означатиме наявність щонайменше двох коренів між точками $2k-1$ і $2k$. Тому многочлен матиме не менше за $2\cdot\frac{p-1}{2}=p-1$ корінь. З іншого боку, степінь многочлена $f_p(x)$ дорівнює $p-1$, тому він не може мати більше за $p-1$ корінь. Значить, многочлен матиме рівно $p-1$ корінь.

Залишається показати, що $f_p(2k-1/2)<0$.

$$f_p\left(2k-\frac{1}{2}\right)-1=\frac{4k-3}{2}\cdot\frac{4k-5}{2}\cdot...\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot...\cdot\left(-\frac{2p-4k-1}{2}\right).$$

У цьому добутку $p-1\geqslant 6$ множників, причому з них рівно $2k-1$ додатних і $p-2k\geqslant 1$ від'ємних. Оскільки $p-2k$ є непарним числом, добуток від'ємний, тож лишається переконатися, що за модулем він перевищує 1. Це справді так, бо всі його множники, крім $\pm\frac{1}{2}$, за модулем більші від 1, а вже добуток шести найменших за модулем можливих множників, включно з $\pm\frac{1}{2}$, має абсолютне значення, більше за 1:

$$\left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\right|=\frac{225}{64}>1.$$

3. ***Відповідь:*** основа дорівнює 20, а бічні сторони — по 15.

Розв'язання. Позначмо вершини заданого трикутника як *A, B, C*, де $AB=AC$, ортоцентр трикутника як *H*, а основу висоти, опущеної з вершини *A*, як *D* (рис. 15). Позначимо також через *a* сторону *BC*, через *b* довжину сторін $AB=AC$, через α кут $\angle ABC=\angle ACB$, через *r* радіус уписаного кола, через *p* півпериметр трикутника *ABC*, а через *S* його площу.

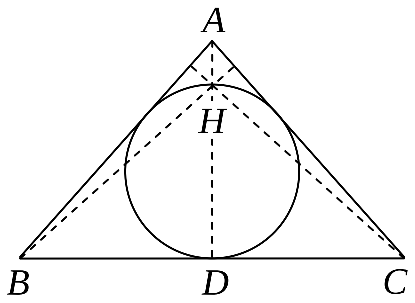

Рис. 15

Зрозуміло, що *H* є точкою, діаметрально протилежною до точки *D* на вписаному колі трикутника. Зауважимо також, що $p=\frac{a+b+b}{2}=b+\frac{a}{2}$. Тоді, скориставшись із формули Герона для площі трикутника та добре відомого співвідношення $S=pr$, матимемо:

$$HD=2r=2\frac{S}{p}=2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)}}{p}=2(p-b)\sqrt{\frac{p-a}{p}}=a\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}.$$

У той же час

$$HD = BD \cdot \operatorname{tg} \angle HBD = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{2} \cdot \frac{BD}{AD} =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{BD}{\sqrt{AB^2 - BD^2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a/2}{\sqrt{b^2 - a^2/4}} = \frac{a^2}{2\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{(2b-a)(2b+a)}}.$$

Тоді маємо, що

$$a\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}} = \frac{a^2}{2\sqrt{(2b-a)(2b+a)}} \;\Rightarrow\; \sqrt{2b-a} = \frac{a}{2\sqrt{(2b-a)}} \;\Rightarrow\; 2(2b-a) = a \;\Rightarrow\; b = \frac{3a}{4}.$$

Звідси $r = \frac{HD}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4b-2a}{4b+2a}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{5a}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$. Оскільки за умовою $r = 2\sqrt{5}$, це означає, що $a = (2\sqrt{5})^2 = 20$, а $b = \frac{3a}{4} = 15$.

Провівши міркування у зворотному напрямі, дістанемо, що трикутник з основою довжини 20 і бічними сторонами завдовжки 15 дійсно задовольняє умову задачі.

4. ***Відповідь:*** 1006.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу, не прив'язуючись до конкретних чисел. Нехай задано кола ω_1 та ω_2 радіусів r_1 і r_2 з центрами в точках O_1 та O_2 відповідно і проведено спільну зовнішню дотичну t до цих кіл, причому відстань між точками дотику дорівнює d.

Назвімо ламані, які задовольняють умову задачі, правильними. Відобразимо друге коло відносно прямої t й одержимо коло ω_2' такого самого радіуса з центром у деякій точці O_2' (рис. 16). Тепер поставимо у відповідність кожній правильній ламаній ламану такої самої довжини, що має кінці на колах ω_1 та ω_2'. Для цього розглянемо точку X на прямій t — першу з точок (якщо рухатися уздовж ламаної від першого кола до другого), у яких правильна ламана перетинає цю пряму. Із двох частин, на які ділить правильну ламану точка X, одна має кінець на колі ω_1, а інша на колі ω_2. Ту частину, яка має кінець на колі ω_2, відобразимо відносно прямої t і приєднаємо до першої частини, «відкинувши» оригінальну частину ламаної. Сконструйована ламана матиме кінці на колах ω_1 та ω_2'.

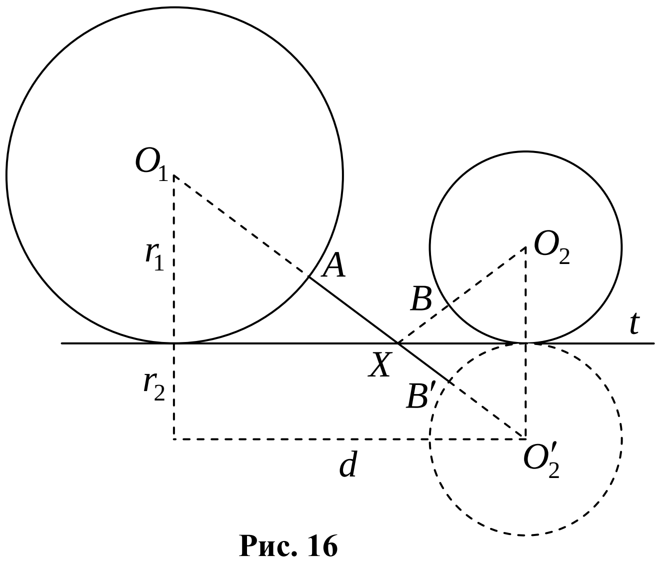

Рис. 16

Встановлена відповідність є взаємно однозначною, бо за ламаною з кінцями на колах ω_1 та ω_2' можна відновити правильну ламану, взявши першу точку X, у якій ламана перетинає пряму t, і знову відобразивши другу частину ламаної відносно цієї прямої. Потрібна точка X обов'язково знайдеться, бо кола ω_1 і ω_2' розташовані по різні боки від t.

Отже, довжина найкоротшої правильної ламаної збігається з довжиною найкоротшої ламаної, що з'єднує певну точку A на колі ω_1 з деякою точкою B' на колі ω_2' — очевидно, це буде відрізок AB'. Довжина ламаної не менша за довжину відрізка, який з'єднує її кінці, тому $O_1A + AB' + B'O_2' \geqslant O_1O_2'$, звідки $AB' \geqslant O_1O_2' - O_1A - B'O_2' = O_1O_2' - r_1 - r_2$. З іншого боку, якщо точки A та B' лежать на відрізку O_1O_2', як показано на рис. 16, то $AB' = O_1O_2' - r_1 - r_2$. Тому величина $O_1O_2' - r_1 - r_2$ і є шуканою.

Щоб знайти O_1O_2', побудуймо на O_1O_2' як на гіпотенузі прямокутний трикутник з катетом, паралельним до прямої t. Цей катет має довжину d, а перпендикулярний до нього катет дорівнює $r_1 + r_2$. Тому $O_1O_2' = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + d^2}$.

Залишається тільки підставити задані в умові числові значення:

$$AB' = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + d^2} - r_1 - r_2 = \sqrt{1509^2 + 2012^2} - 1509 = 2515 - 1509 = 1006.$$

5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*

6. ***Розв'язання.*** За умовою задачі $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 1$ для деяких попарно різних цілих чисел a, b, c, d. Розгляньмо многочлен $Q(x) = P(x) - 1$. Числа a, b, c, d є, очевидно, коренями цього многочлена, тому його можна записати як $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)R(x)$, де $R(x)$ — ще один многочлен із цілими коефіцієнтами.
Припустимо, що для деякого цілого значення t має місце рівність $P(t) = 2012$. Тоді

$$Q(t) = (t-a)(t-b)(t-c)(t-d)R(t) = P(t) - 1 = 2011.$$

$R(t)$ — ціле, а $t-a$, $t-b$, $t-c$ і $t-d$ — чотири різних цілих числа. У той же час просте число 2011 ділиться лише на чотири різних цілих числа: 1, 2011, -1 і -2011. Але добуток цих чотирьох чисел більший за 2011, тому $Q(t)$ не може дорівнювати 2011. Дістали суперечність.

7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» середньої ліги.*

Старша ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» старшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» старшої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» старшої ліги.*

7. ***Відповідь:*** існує.
Розв'язання. Нескладно пересвідчитися, що ламана, утворена шістьма ребрами куба, позначеними на рис. 17 товстою лінією, задовольняє умову задачі.

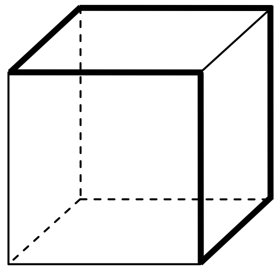
Рис. 17

8. *Задача № 8 групи «Б» середньої ліги.*

Старша ліга. Група «В»

1. *Задача № 1 групи «Б» середньої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» старшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «Б» старшої ліги.*

8. ***Розв'язання.*** Розгляньмо довільний правильний 12-кутник $A_1A_2...A_{12}$, вписаний у коло (рис. 18). Трійки його вершин (A_1, A_5, A_9), (A_2, A_6, A_{10}), (A_3, A_7, A_{11}) та (A_4, A_8, A_{12}) утворюють правильні трикутники, в кожному з яких, згідно з умовою, є по 2 жовті вершини. Це означає, що серед 12 точок A_1, A_2, …, A_{12} жовтих рівно $4 \cdot 2 = 8$.

Разом із тим четвірки вершин (A_1, A_4, A_7, A_{10}), (A_2, A_5, A_8, A_{11}) і (A_3, A_6, A_9, A_{12}) утворюють вписані квадрати. А якщо у трьох квадратах у сумі 8 жовтих вершин, то в одному з них жовтих вершин має бути принаймні 3.

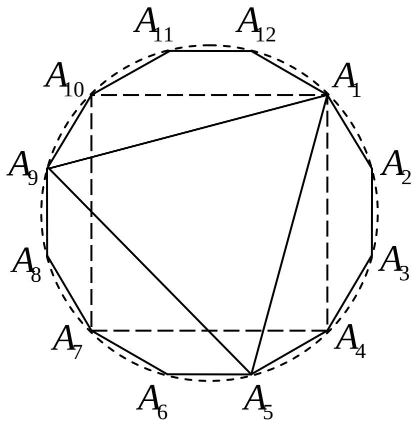

Рис. 18