Подібність 1

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Доведіть, що центром поворотної гомотетії, що переводить точку A в A', а точку B в B' є друга точка перетину кіл, описаних навколо трикутників OAA' та OBB', де O – точка перетину прямих AB та $A'B'$.

2. Два кола S_1 та S_2 перетинаються в точках A та B. Пряма, що проходить через A перетинає S_1 та S_2 в точках P_1 та P_2 відповідно. Доведіть, що при поворотній гомотетії з центром в точці B, що переводить S_1 в S_2, точка P_1 переходить в P_2.

3. Чотири прямі при перетині утворюють чотири трикутника. Доведіть, що кола описані навколо цих трикутників перетинаються в одній точці (ця точка називається *точкою Мікеля* для цих чотирьох прямих).

4. По двум прямим, що перетинаються в точці Z з постійною швидкістю рухаються точки X та Y.
   а). Доведіть, що кола описані навколо трикутників XYZ проходять через фіксовану точку відмінну від Z або дотикаються.
   б). Доведіть, що існує точка, відношення відстаней від якої до точок X та Y є незмінним.
   в). Точка K ділить відрізок XY в постійному відношенні. Доведіть, що K рухається по прямій.

5. Многокутник $A_1A_2\cdots A_n$ відповідно подібний до многокутника $B_1B_2\cdots B_n$. Точки $C_1, C_2, \cdots, C_n$ лежать на відрізках $A_1B_1, A_2B_2, \cdots, A_nB_n$ відповідно і ділять їх у рівному відношенні. Доведіть, що многокутник $C_1C_2\cdots C_n$ подібний до данних многокутників.

6. Дано два правильних п'ятикутника зі спільною вершиною. Вершини кожного п'ятикутника нумеруються цифрами від 1 до 5, причому у спільній вершині ставиться 1. Доведіть, що 4 прямі, що зєднують вершини з однаковими номерами перетинаються в одній точці.

7. На сторонах трикутника ABC побудовані подібні трикутники ABC_1, BCA_1, CAB_1 так, що $\angle C_1BA = \angle A_1BC = \angle AB_1C$; $\angle A_1CB = \angle B_1CA = \angle AC_1B$. Доведіть, що
   а). Кола, описані навколо трикутників ABC_1, BCA_1 та CAB_1, перетинаються в одній точці.
   б). В цій же точці перетинаються прямі AA_1, BB_1 та CC_1.

8. В трикутнику ABC симедіана, що проходить через вершину A перетинає сторону BC в точці M. Точки P та Q вибрані на сторонах AB та BC відповідно так, що $MP \parallel AC$ і $MQ \parallel AB$. Доведіть, що описане коло трикутника MPQ дотикається до прямої BC.

9. Дан випуклий чотирикутник $ABCD$; ABM, CDP – правильні трикутники побудовані зовні на сторах AB та CD; BCN, DAQ – правильні трикутники побудовані всередину на сторонах BC та DA. Доведіть, що $MNPQ$ – паралелограм.

10. У випуклому п'ятикутнику $ABCDE$ $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ і $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Діагоналі BD та CE перетинаються в точці P. Доведіть, що AP проходить через середину CD.

11. Бокові сторони AD та BC трапеції $ABCD$ повернуті навколо своїх середин на кут $90°$, після чого вони займають положення A_1D_1 та B_1C_1. Доведіть, що $A_1B_1 = C_1D_1$.

12. Нехай H – ортоцентр трикутника ABC. Перпендикуляр, опущенний з точки H на бісектрису кута $\angle ACB$ перетинає сторони CA та CB в точках P та Q. Кола, описані навколо трикутників ABC та CPQ перетинаються другий раз в точці T. Доведіть, що пряма TH проходить через середину AB.

13. Дан рівнобедренний трикутник ABC, T – середина дуги BC, що не містить точку A, описаного кола $\triangle ABC$ ($AB = AC$). На прямих AB, AC та на продовженні сторони BC відмічені точки X, Y та P відповідно так, що $PX \parallel AC$ і $PY \parallel AB$. Доведіть, що $PT \perp XY$.

14. Випуклий чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло W. Всередині кола W відмічена точка S така, що $\angle SAD = \angle SCB$ і $\angle SDA = \angle SBC$. Бісектриса кута $\angle ASB$ перетинає коло W в точках P та Q. Доведіть, що $PS = QS$.

15. Дан опуклий чотирикутник $ABCD$. Всередині чотирикутника відмічені точки E, F такі, що $AE = BE$, $CE = DE$, $\angle AEB = \angle CED$ і $AF = DF$, $BF = CF$, $\angle AFD = \angle BFC$. Доведіть, що $\angle AFD + \angle AEB = 180°$.