

# Теорія числа

1. Доведіть, що число  $n^3 - n$  ділиться на 6 при всіх  $n$ .
2. Доведіть, що існує нескінченно багато чисел, що не подаються в сумі трьох квадратів.
3. Доведіть, що число в десятковому записі якого використанні 3 одиниці і кілька нулів не може бути квадратом.
4. Які числа можна подати у вигляді різниці двох квадратів цілих чисел?
5. При яких  $n$  число  $2^n - 11$  ділиться на 7?
6. Відомо, що сума кількох натуральних чисел ділиться на 6. Доведіть, що і сума кубів тоді також ділиться на 6.
7. Доведіть, що якщо цілочисельна арифметична прогресія містить квадрат цілого числа, то вона містить нескінченно багато квадратів цілих чисел.
8. Три цілих числа пов'язанні співвідношенням  $x^2 + y^2 = z^2$ . Доведіть, що  $x$  або  $y$  діляться на 3.
9. Шестизначне число ділиться на 7. Доведіть, що якщо останню цифру переставити на початок, то отримане число також ділитиметься на 7.
10. Доведіть, що якщо сума двох квадратів ділиться на 3, то тоді вона ділиться і на 9.
11. У вас є натуральне число. До нього в кінець приписують по одній цифрі, окрім 9. Доведіть, що через якусь скінченну кількість операцій воно стане складеним.
12. Доведіть, що існує нескінченно багато цілих чисел, які неможна подати у вигляді суми:
  - А) трьох кубів;
  - Б) семи шостих степенів цілих чисел.
13. Доведіть, що існує нескінченно багато простих чисел вигляду  $3k + 2$ , де  $k$  - ціле невід'ємне число.