# Метод множників Лагранжа

*Я займаюся геометрією спокійно*
*і в тиші...*

*Жозеф Луї Лагранж*

Довести нерівності:

1. для $a, b, c \geqslant 0$
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + c^2b + b^2a.$$

2. для $a, b, c \geqslant 0$ таких, що $a + b + c = 1$,
$$9abc \leqslant ab + bc + ca \leqslant 2abc + \frac{7}{27}.$$

3. для $x, y, z \in [0, 1]$
$$\frac{x}{\sqrt{1+yz}} + \frac{y}{\sqrt{1+zx}} + \frac{z}{\sqrt{1+xy}} \leqslant \sqrt{2(x+y+z)}.$$

4. для $x, y, z$ таких, що $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

5. для $x, y, z$ таких, що $x^2 + y^2 + z^2 = 3$,
$$\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \geqslant \frac{3}{2}.$$

***Рекомендую хоча б одну нерівність зробити і здати мені (оформити як на олімпіаді).***

*І все-таки, спробуйте ще раз:*

**Лема.** Якщо точки $A, B, C$ на площині рухаються прямолінійно рівномірно (кожна по своїй прямій), і в деякі три моменти вони були колінеарні, то і в будь-який момент часу вони будуть колінеарні. Довести.

6. Сторони $AB$ і $CD$ чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці $F$, сторони $AD$ і $BC$ — в точці $E$. Довести, що ортоцентри тркутників $ABE$, $CDE$, $BCF$ і $AFD$ колінеарні.

7. На прямих $BC, CA$, $AB$ взято точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, причому точки $A_1, B_1, C_1$ — колінеарні. Прямі, симетричні прямим $AA_1$, $BB_1$ і $CC_1$ відносно відповідних бісекстрис трикутника $ABC$, перетинають прямі $BC$, $CA$ і $AB$ в точках $A_2$, $B_2$ і $C_2$. Довести, що точки $A_2$, $B_2$, $C_2$ — колінеарні.