Многочлени і якісь функціоналки

1 Для многочлена $p(z)$ і $c \in \mathbb{C}$, $M_c(p) = \{z : p(z) = c, z \in \mathbb{C}\}$. Довести, що коли для многочленів $p(z), q(z) \in \mathbb{C}_{[x]}$ виконується $M_0(p) = M_0(q)$ та $M_1(p) = M_1(q)$, то $p = q$.

2. $\deg P = n$, та $P(k) = \dfrac{1}{C_{n+1}^k}$ при $k = 0,1....n$. Знайти $P(n+1)$

3.Нехай $x_0 < x_1 < .... < x_n \in \mathbb{Z}$. Довести, що серед значень многочлена степені n, з старшим коефіцієтом 1, в цих точках є таке, що по модулю не менше $\dfrac{n!}{2^n}$.

4 *Теорема Гаусса-Люка:* Корені похідної многочлена належать випуклій оболочці коренів многочлена. (розглядається комплексна площина).

5.Довести, якщо $P \in \mathbb{R}_{[x]}$ та $P(x) \geq 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$, то існують $Q, R \in \mathbb{R}_{[x]}$, що $P = Q^2 + R^2$.

6. Знайти всі $P \in \mathbb{R}_{[x]}$, що для довільного x виконується $P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$.

7. $P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}, P(0) \neq 0$ всі корені $|\alpha_i| = 1$. Старший коеф. рівний 1. Довести існує m, що $x^m - 1 \vdots P(x)$.

8. $a_1, a_2, ...a_n \in \mathbb{C}$ та $P(x) \equiv b_k (\mathrm{mod}\ x - a_k)$, при $k \geq 1$. Знайти остачу $P(x)\ (\mathrm{mod}\ (x-a_1)...(x-a_n))$.

9. $f(x) \in \mathbb{R}_{[x]}$ всі корені якого дійсні.

1)Визначимо $I_\alpha(f) = f + \alpha f'$, де $\alpha \in \mathbb{R}$. Довести всі корені $I_\alpha(f)$ - дійсні.

2) Довести всі корені $f + 9f' + 10f''$ - дійсні.

3) $g(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + ... + a_k$ - має всі дійсні корені. Довести, що всі корені $f + a_1 f' + a_2 f'' + ... + a_k f^{(k)}$ дійсні.

10. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ має 3 різних дійсних корені. Скільки різних коренів має рівняння $4(ax^3 + bx^2 + cx + d)(3ax + b) = (3ax^2 + 2bx + c)^2$?

11. $P(x^3) + Q(x^3) \vdots (x^2 + x + 1)$ Довести $P(x) + Q(x) \vdots (x-1)$.

12. $P(x) = \dfrac{1}{2}(P(x+1) + P(x-1))$ Знайти всі $P \in \mathbb{R}$.

13 $p = \overline{p_n p_{n-1} ... p_0}$ - просте число. Та $p_n > 1$. Довести многочлен $P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + ... + p_0$ - незвідний над $\mathbb{Z}$.

14 $P(x^2 - 2x) = (P(x-2))^2$ для довільного $x \in \mathbb{R}$. Знайти всі $P \in \mathbb{R}_{[x]}$.

15 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ \ a \neq 0,\ \ a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Рівняння $xP(x) = yP(y)$ виконується для нескінченної кількості цілих $x \neq y$. Довести $P(x) = 0$ - має дійсний корінь.

16. $P(x)$ - непостійний многочлен з цілими коефіцієнтами. Довести не існує функції $T:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, такої що кількості розв»язків $T^n(x)=x$ рівна $P(n)$, для $n\in\mathbb{N}$. Де $T^n=T(T(T....(T(x))...))$ - н-та ітерація.

17. p,q -многочлени, що мають хоч по одному дійсному кореню та $p(1+x+q(x)^2)=q(1+x+p(x)^2)$ для довільного $x\in\mathbb{R}$. Довести $p=q$.

18. $p,q,r\in\mathbb{C}_{[x]}$, взаємнопрості. $a,b,c\in\mathbb{N}$ та $P(x)^a+Q(x)^b=R(x)^c$. Довести $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$.

19. Довести, що многочлен степені n з дійсними коефіцієнтами не є сумою n періодичних функцій.

20 $f,g\in\mathbb{Q}_{[x]}$ та $f(\mathbb{Q})=g(\mathbb{Q})\Leftrightarrow f(x)=g(ax+b)$, для деяких $a,b\in\mathbb{Q}$.

(Де $f(\mathbb{Q})=\{f(x):\forall x\in\mathbb{Q}\}$)

21 $t\geq 3$ та $p(x)$ такі, що $\left|p(k)-t^k\right|<1$, для $k=0,1,2....,n$. Довести $\deg p\geq n$.

22 Довести для довільного $Q\in R_{[x]}$ існує многочлен $P(x,y,z)$, що $Q(t)\equiv P(t^n,t^{n+1},t^{n+2}+t)$ (тотожньо рівні як многочлени)\

Якщо не сказано іншого треба знайти всі f

23. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та $f(x^2+f(y))=f(x)^2+y$ для довільних x,y. Знайти всі f.

24 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ та $f(f(x)-x)=2x$ для довільного $x\in\mathbb{R}^+$. Знайти всі f

25. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та $f(0)=0$, а ще $f(\frac{x^2+y^2}{2xy})=\frac{f(x)^2+f(y)^2}{2f(x)f(y)}$ для $\forall x,y\neq 0$.

26 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(f(x))=x^2-2$. Знайти всі f.

27. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та для довільного $x,y\in\mathbb{R}$ $f(x+y^n)=x+f(y)^n$, де $n\geq 2$ фіксоване натуральне.

28 $f(x+y)+g(x-y)=2h(x)+2h(y)$ для $\forall x,y\in\mathbb{R}$ та $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $f,g,h-неперервні$.

29. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та $f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)=f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z)$, для довільних $x,y,z\in\mathbb{R}$.

30. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\left|f(x)\right|\leq 1$ та $f(x+\frac{13}{42})+f(x)=f(x+\frac{1}{6})+f(x+\frac{1}{7})$ для довільного x.

31 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та для довільних x,y виконується $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$

32. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та для довільних x,y виконується $f(x^2+y^2+2f(xy))=f(x+y)^2$.

33. $f(a-b)+f(b-c)+f(c-a)=2f(a+b+c)$ виконується для довільних $a,b,c\in\mathbb{R}$, що $ab+bc+ac=0$, де $f\in\mathbb{R}_{[x]}$.

34. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ та виконується для довільних x,y $f(x)f(y)=2f(x+yf(x))$.

35. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ та виконується для довільних x,y $f(x+f(y))=f(y)+f(x+y)$.

36. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та виконується для довільних x, y $f(x+y)\le yf(x)+f(f(x))$. Довести $f(x)=0$ для всіх $x\le 0$.
37. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та виконується для довільних x, y $f(xy)(f(x)-f(y))=(x-y)f(x)f(y)$
38. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та виконується для довільних x, y $f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x)$
39. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та виконується для довільних x, y $f(xf(x+y))=f(yf(x))+x^2$.

Ваш борг:
1) $(g(m)+n)(g(n)+m)$ - квадрат для довільних n,m, де $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Знайти g
2) Знайти всі $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, що $f(f(n))+f(n)\in\{2n+2001, 2n+2002\}$
3) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $(f(1), f(2))=1$ $f(n+2)=f(n+1)f(n)+1$ Довести, для $i>1$, існує $j>i$, для якого $f(j)^j \vdots f(i)^i$. Чи правда це для $i=1$?
4)для тих хто ще не доробив : $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $f(t^2 f(s))=sf(t)^2$. Знайти найменше можливе $f(1998)$.
5) $a_n\in\mathbb{N}$, $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|+|a_{n-2}-a_{n-3}|$, для $n\ge 4$, та $a_1=11^{11}, a_2=12^{12}, a_3=13^{13}$. Знайти $a_{14^{14}}$.

Не забудьте прочитати статтю «Иррациональность суммы радикалов» Л. Н. Камнев. Квант 1972 №2. (http://kvant.mccme.ru/1972/02/irracionalnost_summy_radikalov.htm)