

Велика новорічна домашня робота - 2

1. На полі 10×10 для гри в “Морський бій” стоїть один чотирьохпалубний корабель. Яку мінімальну кількість пострілів потрібно зробити, щоб його точно поранити?
2. Довести, що з будь-яких ста натуральних чисел можна вибрати декілька, сума яких ділиться на 100.
3. Довести, що шахову дошку розміром $4 \times n$ не можна обійти конем так, щоб побувати при цьому на кожному полі, і останнім ходом повернутися на початкове поле. (Перебирайте розфарбовки!)
4. На одному кінці смуги 1×103 стоїть чорна, на іншому — біла фішка. Двоє по черзі рухають кожний свою фішку на 1, 2, 3 або 4 клітинки у будь-якому напрямку (перестрибувати через чужу фішку забороняється). Програє той, хто не може зробити хід. Хто переможе?
5. В орієнтованому графі 101 вершина. У кожній вершині кількість вихідних ребер і кількість вхідних ребер дорівнює 40. Довести, що з будь-якої вершини можна потрапити в будь-яку іншу, проходячи не більш, ніж по трьом ребрам.
6. Довести, що в дереві є дві висячі вершини (тобто вершини, степінь яких дорівнює 1).
7. Є сім натуральних чисел, сума будь-яких шести з яких кратна п'яти. Довести, що всі числа кратні п'яти.
8. Розв'язати рівняння в цілих числах
а) $x^3 + 3 = 4y(y + 1)$, б) $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$, в) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
9. Довести, що сума п'яти послідовних натуральних чисел не може бути повним квадратом.
10. Послідовність (x_n) визначається наступним чином: $x_1 = 3^{2011}$, а кожний наступний дорівнює сумі цифр попереднього. Знайти x_5 .

Гарних канікул!