Літні тренувальні збори 2012 року. Матбій

1. AH_1, BH_2, CH_3 — висоти гострокутного різностороннього трикутника ABC. Вписане коло трикутника ABC дотикається до сторін BC, CA і AB в точках T_1, T_2 й T_3 відповідно. Нехай P_k $(k = 1, 2, 3)$ — така точка на прямій H_kH_{k+1} (тут $H_4 = H_1$), що трикутник $H_kT_kP_k$ гострокутний і $H_kT_k = H_kP_k$. Доведіть, що кола, описані навколо трикутників $T_1P_1T_2$, $T_2P_2T_3$, $T_3P_3T_1$, проходять через спільну точку.

2. В аудиторіях університету розміщено парну кількість ламп, щонайменше по три лампи в кожній кімнаті. Дивакуваті електрики зробили вимикачі так, що кожен вимикач підключений рівно до двох ламп (не обов'язково з однієї кімнати), а натискання цього вимакача змінює їхній стан на протилежний. Доведіть, що розумний студент може натискати вимикачі так, щоб після певної кількості натискань у кожній з аудиторій були як увімкнені, так і вимкнені лампи.

3. Нехай $f(x, y)$ — многочлен від двох змінних. Відомо, що для довільних натуральних чисел a і b число $f(a, b)$ натуральне і є спільним дільником a та b. Доведіть, що $f(x, y) \equiv 1$.

4. Вершини нескінченного графа занумеровані натуральними числами так, що кожне натуральне число є номером рівно однієї вершини. Відомо, що немає двох множин, які містять по 2012 вершин графа, таких, що кожна вершина з першої множини з'єднана з кожною вершиною з другої множини. Доведіть, що існує арифметична прогресія як завгодно великої довжини така, що жодні дві вершини з номерами з цієї арифметичної прогресії не з'єднані ребром.

5. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — $2n$ додатних дійсних чисел. Відомо, що $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1$. Доведіть, що справджується нерівність: $a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \ldots + a_n(b_n + a_1) < 1$.

6. Нехай O та I — центри вписаного та описаного кіл трикутника ABC. Зовнівписане коло ω_a дотикається до прямих AB, AC і відрізка BC в точках K, M, N відповідно. Відомо, що середина відрізка KM належить описаному колу трикутника ABC. Доведіть, що точки O, N, I колінеарні.

7. Для заданого простого $p > 5$ і натурального x позначмо $f_p(x) = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(px+k)^2}$. Доведіть, що для довільних натуральних x та y різниця $f_p(x) - f_p(y)$ може бути записана як нескоротний дріб, чисельник якого ділиться на p^3.

8. Є одна червона і $k > 1$ синіх комірок, а також колода з $2n$ карт, занумерованих числами від 1 до $2n$. У початковий момент уся колода лежить в червоній комірці (карти перетасовано в довільному порядку). З картами дозволяється робити таку операцію: з довільної комірки можна взяти верхню карту й або перекласти її в порожню комірку, або покласти її на карту з номером, що на 1 більший. Знайдіть найбільше значення n, при якому всі карти можна перекласти в одну з синіх комірок незалежно від початкового розташування карт у червоній комірці.

9. Нехай p — просте, a, b, c — натуральні числа, причому $6 \mid p + 1$, $p \mid a + b + c$ і $p \mid a^4 + b^4 + c^4$. Доведіть, що кожне з чисел a, b, c ділиться на p.

10. Для довільного $m > 0$ назвімо m-трилінійною точкою довільну точку x усередині многокутника P таку, що існують три різні точки x_1, x_2, x_3 на границі многокутника P, для яких $d(x_1, x) = d(x_2, x) = d(x_3, x) = m$, де через $d(a, b)$ позначено відстань від точки a до точки b. Чи правда, що довільна точка всередині довільного неопуклого многокутника є m-трилінійною для деякого $m > 0$?