

Занятие №5. Подобие треугольников - 1

Хилько Данил DKHILKO@UKR.NET

Задача 1. Дан четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что окружность, описанная около треугольника ABC , касается стороны CD , а окружность, описанная около треугольника ACD , касается стороны AB . Докажите, что диагональ AC меньше, чем расстояние между серединами сторон AB и CD .

Задача 2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$. На диагонали BD выбрана точка K такая, что $\angle AKB + \angle BKC = \angle A + \angle C$. Докажите, что $AK \cdot CD = KC \cdot AD$.

Задача 3. На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка M , что CM и BM параллельны AB и CD соответственно. Докажите, что $S_{ABCD} \geq 3S_{BCM}$.

Задача 4. В остроугольном треугольнике ABC AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке K . Окружности, описанные вокруг треугольников A_1KC_1 и A_1KB_1 , вторично пересекают прямые AB и AC в точках N и L соответственно. Докажите, что а) сумма диаметров этих окружностей равна стороне BC . б) $A_1N/BB_1 + A_1L/CC_1 = 1$.

Задача 5. Пусть ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник. На продолжении гипотенузы AB за точку A взята точка D такая, что $AB = 2AD$. Точки M и N на стороне AC таковы, что $AM = NC$. На стороне CB за точку B взята точка K такая, что $CN = BK$. Найдите угол между прямыми NK и DM .

Задача 6. В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках V и S . Прямая, проходящая через A , пересекает окружность в точках D и E . Хорда BX параллельна прямой DE . Докажите, что отрезок XC проходит через середину отрезка DE .

Задача 7. Высоты AA_1 , CC_1 пересекаются в точке H . Точка Q симметрична середине стороны AC относительно AA_1 ; точка P — середина A_1C_1 . Докажите, что $\angle QPH = 90^\circ$.

Задача 8. Высоты AA_1 , CC_1 пересекаются в точке H . Пусть M — середина AC , а N — середина A_1C_1 . Докажите, что описанная окружность NHM касается BH .

Задача 9. Дан треугольник ABC . Окружность ω проходит через вершины A и C и пересекает стороны BA и BC в точках C_1 и A_1 . Описанная окружность треугольника BA_1C_1 пересекает во второй раз описанную окружность треугольника ABC в точке K . Пусть O — центр ω . Доказать, что $\angle BKO = 90^\circ$.

Задача 10. Вокруг правильного треугольника ABC описали окружность ω . W — середина меньшей дуги AB ω . Пусть D — произвольная точка на дуге AC описанной окружности. Отметим M — середину DC , и K — проекцию W на DB . Доказать, что треугольник AMK правильный.