Відбір міста Києва на Всеукраїнську олімпіаду

IV тур

Умови та розв'язки по усіх класах

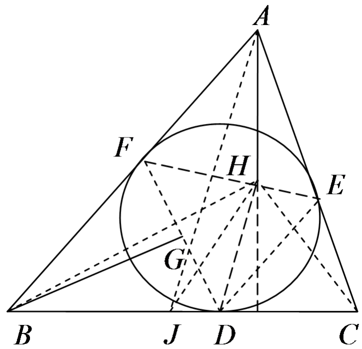
<u>8 клас</u>

1. Натуральні числа $a > b > 1$ такі, що рівняння $\frac{a^x-1}{a-1} = \frac{b^y-1}{b-1}$ має принаймні два різних натуральних розв'язки $x, y > 1$. Довести, що числа a і b є взаємно простими.

   <u>Розв'язання.</u> Від супротивного. Припустимо, що числа a та b мають спільний простий дільник p. Позначимо через $ord_p(n)$ – максимальний степінь простого числа p, на який ділиться число n. Побачимо, що $\left(n, \frac{n^l-1}{n-1}\right) = 1 \ \forall n > 1$ та нагадаємо, що якщо $p \mid n \Rightarrow p \nmid (n-1)$.

   Нехай $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ два різних розв'язки заданого рівняння і $x_1 > x_2$. Тоді із заданого рівняння випливає, що $ba^{x_1} - ab^{y_1} + a - b = a^{x_1} - b^{y_1}$. Звідси легко одержати, що $ord_p(a) = ord_p(b)$. Віднімаючи дві рівності, які задані в умовах, для цих двох розв'язків, одержимо, що $\frac{a^{x_1}-1}{a-1} = \frac{b^{y_1}-1}{b-1}$, $\frac{a^{x_2}-1}{a-1} = \frac{b^{y_2}-1}{b-1}$, $\Rightarrow a^{x_2} \cdot \frac{a^{x_1-x_2}-1}{a-1} = b^{y_2} \cdot \frac{b^{y_1-y_2}-1}{b-1} \Rightarrow x_2 \cdot ord_p(a) = y_2 \cdot ord_p(b) \Rightarrow$ $x_2 = y_2$ звідси очевидно випливає, що $a = b$. Одержана суперечність завершує доведення.

2. Коло, яке вписане у гостроктуний різносторонній трикутник ABC дотикається до сторін BC, CA та AB в точках D, E та F відповідно. На відрізку EF вибрана така точка H, що $DH \perp EF$. Довести, що якщо $AH \perp BC$, то H – ортоцентр $\triangle ABC$.

   <u>Рис.4</u>

   <u>Розв'язання.</u> Проведемо відрізки DE, DF, BH, CH, позначимо через G – середину відрізку DF і проведемо відрізок BG. Оскільки $BD = BF$, то $BG \perp FD$. За властивістю вписаних кутів $\angle BFD = \angle FED$. Тому прямокутні трикутники BFG та DEH – подібні $\Rightarrow \frac{BF}{DE} = \frac{FG}{EH} \Rightarrow$ $BF \cdot EH = \frac{1}{2} DE \cdot DF$, аналогічно $CE \cdot FH = \frac{1}{2} DE \cdot DF$. Якщо поєднати ці дві умови, маємо $BF \cdot EH = CE \cdot FH$, або $\frac{BF}{CE} = \frac{FH}{EH}$. Оскільки $\angle BFH = \angle CEH$, то $\triangle BFH = \triangle CEH \Rightarrow \angle FBH = \angle ECH$.

   Відобразимо точку C симетрично відносно прямої AH, одержимо точку $J \in BC$, проведемо відрізки AJ та HJ. З властивостей симетричних точок $\angle AJH = \angle CAH = \angle ABH$, тому точки A, B, J, H – циклічні. Тому $\angle BAH = 180° - \angle HJB = \angle HJC = \angle HCJ \Rightarrow$ $\angle HCJ + \angle CBA = \angle BAH + \angle CBA = 90°$. Звідси випливає, що $CH \perp AB$, тому H – ортоцентр $\triangle ABC$, що й треба було довести.

3. Щегол придумав нове правило додавання дробів: спочатку дробі приводяться до спільного чисельника, а далі знаменники одержаних дробів додаються, тобто $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{ac}{bc+ad}$. Знайдіть принаймні одну пару ненульових дробів, які додаванням за правилом Щегла дають правильну відповідь.

   <u>Відповідь:</u> Таких дробів не існує.

   <u>Розв'язання.</u> Якщо припустити, що $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, тобто $\frac{ac}{bc+ad} = \frac{ad+bc}{bd}$. Зрозуміло, що $abcd \neq 0$. Після зведення подібних одержимо, що $(bc)^2 + (ad)^2 + abcd = 0$, або $x^2 + y^2 + xy = 0$, але остання рівність очевидно неможлива, бо $x^2 + y^2 + xy = \left(x + \frac{y}{2}\right) + \frac{3}{4}y^2 > 0$ при $xy \neq 0$. Одержана суперечність завершує доведення.

4. У 100 ящиках лежать апельсини та яблука. Доведіть, що можна вибрати 34 ящики таким чином, що у цих вибраних ящиках виявиться не менше третини від усіх яблук та не менше третини від усіх апельсинів.

Розв'язання. Нехай x_i – кількість яблук у i-му ящику, без обмеження загальності розгляду можемо вважати, що $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{100}$. Тепер розіб'ємо ящики з 2-го по 100-й на 3 групи по 33 ящики таким чином, щоб кількість яблук в обох групах відрізнялося не менше ніж на x_1. Це можна зробити, наприклад, таким чином: у першу групу візьмемо ящики з номерами $2, 5, \ldots, 98$, у другу – $3, 6, \ldots, 99$, а у третю – ящики з номерами $4, 7, \ldots, 100$. Тоді, якщо позначити кількість яблук у i-й групі через A_i будемо мати такі оцінки: $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq A_1 - x_2$. Тому і шукана різниця не більша від $x_2 \leq x_1$.

Тепер просто вибираємо групу, у якій не менше від інших апельсинів. До цієї групи додаємо ящик x_1 і одержимо шукану вибірку.

9 клас

1. Задача 8.1

2. Задача 8.2

3. 10 перекладачів запрошені за конгрес, де використовуються 5 різних мов, при цьому кожний перекладач володіє рівно двома мовами та в усіх 10 перекладачів вони різні. Скількома способами їх можна розсадити по 2 у 5 кімнат таким чином, щоб у кожній кімнаті перекладачі мали спільну мову для спілкування між собою? Варіанти заповнення однакові, якщо усі пари однакові (сама кімната ролі не відіграє).

   Відповідь: 144.

   Розв'язання. Кожною мовою володіє рівно 4 перекладачі, тому спільною ця мова може бути щонайбільше для двох кімнат. Зрозуміло також, що не можуть бути дві мови спільними кожна у двох кімнатах, оскільки тоді перекладач з цих двох мов повинен одночасно бути в обох парах кімнат. Таким чином залишається розглянути два випадки. Позначимо мови A, B, C, D, G, а перекладачів відповідно парою літер – $AB, BG, \ldots$, кімнати через спільну мову $R_A, R_B, \ldots$

   1) У кожній кімнаті усі спільні мови різні. Позначимо перекладачів у кімнаті R_G через GA та GB. Тоді два інших перекладачі GC та GD повинні бути у різних кімнатах. І ці кімнати повинні бути R_C та R_D. Таким чином залишилися кімнати R_A та R_B.

   Припустимо, що $AB \in R_A$, $CD \in R_C$. Тоді у нас залишається 1 місце у кімнаті R_D та R_A, а також 2 місця у кімнаті R_B для розміщення решти перекладачів AC, AD, BC, BD. Для вибору представників у кімнату R_B немає вибору, після чого однозначно заповнюється решта кімнат. Таким чином ми маємо таке заповнення:

   $R_G - GA, GB$; $R_A - AB, AC$; $R_B - BC, BD$; $R_C - GC, CD$; $R_D - GD, AD$.

   Це заповнення задовольняє умови задачі, при цьому є усього 4 варіанти при виборі кімнати для AB, CD. Крім того ми маємо $C_4^2 = 6$ варіантів вибору тих двох мов, які знаходяться у кімнаті R_G. Загалом – $4 \cdot 6 = 24$ варіанти.

   2) Маємо дві кімнати, у яких спільна мова однакова. Позначимо цю мову та кімнати R_G^1 та R_G^2. Решта кімнат R_A, R_B та R_C. Але тоді зрозуміло, що для мови D усі 4 перекладачі DA, DB, DC та DG повинні бути розташовані у R_A, R_B, R_C та одній з кімнат R_G^1 чи R_G^2.

   Нехай $AB \in R_A$, тоді кімната R_A заповнена, звідси $AC \in R_C$, тому заповнена $R_C \Rightarrow BC \in R_B$. Решта GA, GB, GC, GD заповнюють R_G^1 та R_G^2 довільним чином. Для останнього є 3 варіанти, вибір для AB – ще 2 варіанти, вибір G – 5 варіантів, вибір D – 4 варіанти. Загалом маємо $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ можливих варіантів.

   Загалом – $24 + 120 = 144$ варіанти.

4. Задані 15 квадратних тричленів $x^2 - p_i x + q_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, 15\}$, у яких усі коефіцієнти різні та вибрані з множини $\{1, 2, \ldots, 30\}$. Корінь квадратного тричлену назвемо гарним,

якщо він більший за 20. скільки усього щонайбільше гарних коренів можуть мати такі параболи?

<u>Відповідь</u>: 10.

<u>Розв'язання</u>. У рівняння $x^2 - px + q = 0$ при $p \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ гарний корінь може бути щонайбільше один, бо якщо таких два, тобто $x_1 > 20$ та $x_2 > 20$, то $p = x_1 + x_2 > 40$ – суперечність. При цьому може бути гарний корінь лише за умови, що відповідне $p > 20$, а таких значень усього 10, тому й кількість їх не перевищує 10. Розглянемо такі параболи з коефіцієнтами $p_k = 20 + k$ та $q_k = k$ при $k = \overline{1, 10}$. Тоді їх дискримінанти мають такий вигляд:

$$D_k = p_k^2 - 4q_k = (20 + k)^2 - 4k = 400 + 40k + k^2 - 4k > 400 - 40k + k^2 = (20 - k)^2,$$

таким чином усі ці рівняння мають корені. При цьому найбільший з цих коренів

$$x_k^{\max} = \frac{p_k + \sqrt{D_k}}{2} = \frac{(20 + k) + \sqrt{D_k}}{2} > \frac{(20 + k) - (20 - k)}{2} = 20,$$

і це остаточно доводить, що маємо 10 гарних коренів.

<u>11 клас</u>

1. Чи існує функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ така, що для кожного натурального n виконується рівність:

$$f(f(n)) = f(n + 1) - f(n).$$

<u>Відповідь</u>: не існує.

<u>Розв'язання</u>. Якщо $f(1) = 1$, то $f(2) = f(f(1)) + f(1) = 2$, $f(3) = f(f(2)) + f(2) = 4$, звідки $f(4) = f(f(3)) + f(3) = f(4) + f(3) \Rightarrow f(3) = 0$ – суперечність. Якщо $f(1) = k \geq 2$, то додамо аналогічні рівності при $n = 1, 2, \ldots, k - 1$ ми одержимо: $f(f(1)) = f(2) - f(1)$, $f(f(2)) = f(3) - f(2)$, ……., $f(f(k-1)) = f(k) - f(k-1) \Rightarrow f(f(1)) + f(f(2)) + \ldots + f(f(k-1)) = f(k) - f(1)$ – суперечність, оскільки $f(f(1)) = f(k)$.

2. Нехай $n \geq 10$ – натуральне число, назвемо його обрубком будь-яке число, що утворене з n шляхом закреслення декількох цифр справа (не менше, ніж одна цифра, але не усі). Позначимо через $T(n)$ – суму усіх обрубків числа, $S(n)$ – сума цифр числа. довести, що $n = S(n) + 9T(n)$.

<u>Розв'язання</u>. Нехай $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^k a_k$, обрубок має вигляд: $n_i = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_i} = a_i + 10a_{i+1} + \ldots + 10^{k-i} a_k$, обчислимо $T(n)$ шляхом вдалого групування доданків.

$$T(n) = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + 10a_{i+1} + \ldots + 10^{k-i} a_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{k} 10^{j-1} a_j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} 10^{j-1} a_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (1 + 10 + \ldots + 10^{j-1}) a_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{10^j - 1}{10 - 1} a_j \Rightarrow 9T(n) = \sum_{j-1}^{k} (10^{j-1} - 1) a_j \Rightarrow$$

$$S(n) + 9T(n) = S(n) + \sum_{j-1}^{k} 10^{j-1} a_j - \sum_{j-1}^{k} a_j = \sum_{j-1}^{k} 10^{j-1} a_j = n,$$

що й треба довести.

3. L – триміно складається з трьох одиничних квадратів, що з'єднані під кутом. Для яких n можна покрити усю поверхню куба $2^n \times 2^n \times 2^n$ без накладань, при умові, що деякі фігурки можна згинати по лініях розділу квадратів?

Відповідь: для усіх n.

Розв'язання. Спочатку ММІ покажемо, що квадрат $2^n \times 2^n$ можна покрити фігурами L-триміно таким чином, щоб непокритим залишився лише один квадратик у будь-якому з кутів. Для $n = 1$ –усе очевидно.

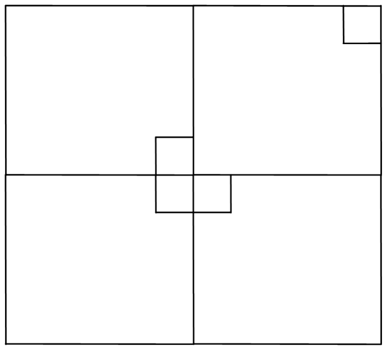


Рис.3

Припустимо, що це справджується для деякого n, розглянемо квадрат розміру $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, оскільки за припущенням індукції ми можемо покрити кожний з чотирьох квадратів так, що залишиться вільним довільний кутовий квадрат. Виберемо у великому квадраті той, який повинен залишитись вільним і далі заповнимо усе, як показано на рис.3. Далі просто заповнюємо ще одним триміно фігурку, яка утворилась всередині.

Тепер, що стосується куба. Ми за доведеним фактом, покриємо усі 6 граней кубика таким чином, щоб непокритими залишились лише по одній клітині на кожній грані у двох протилежних вершинах кубу, як це показано на рис.4. Тоді такі три клітини легко покриваються одним L-триміно, якщо його зігнути відповідним чином.

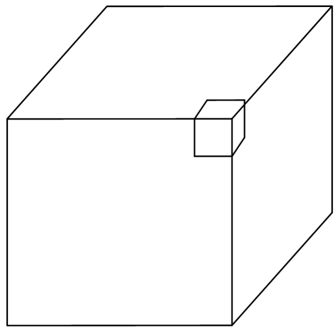


Рис.4

4. Заданий гострокутний трикутник ABC з кутом $\angle ACB = 60°$. Точки A_1, B_1 вибрані на сторонах BC та AC відповідно. Точка D – друга точка перетину кіл, які описані навколо $\triangle BCB_1$ та $\triangle ACA_1$, відмінна від точки C. Довести, що D лежить на стороні AB тоді і тільки тоді, коли $\frac{CB_1}{CB} + \frac{CA_1}{CA} = 1$.

Розв'язання. Позначимо описані навколо $\triangle BCB_1$ та $\triangle ACA_1$ кола через S_1, S_2, нехай їх точка перетину $D \in AB$ (рис.6). За теоремою про степінь точки відносно кола: $BD \cdot BA = BA_1 \cdot BC$, $AD \cdot AB = AB_1 \cdot AC$. Додамо ці рівності

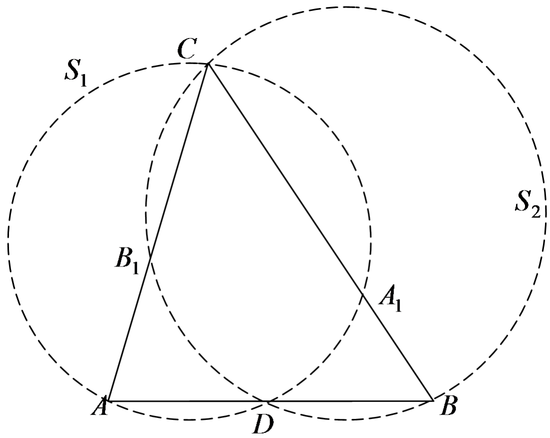


Рис.6

$$AB \cdot BD + AB \cdot AD = BC \cdot BA_1 + AC \cdot AB_1 = AB^2 = BC(BC - CA_1) + AC(AC - CB_1) =$$

$$= BC^2 + AC^2 - (BC \cdot CA_1 + AC \cdot CB_1).$$

З теореми косинусів

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle C = BC^2 + AC^2 - BC \cdot AC.$$

Таким чином

$$BC \cdot AC = BC \cdot CA_1 + AC \cdot CB_1 \Rightarrow \frac{CB_1}{CB} + \frac{CA_1}{CA} = 1.$$

У зворотному напрямі. Нехай $\frac{CB_1}{CB} + \frac{CA_1}{CA} = 1$. Кола S_1, S_2, як і раніше описані навколо та $\triangle BCB_1$ та $\triangle ACA_1$ відповідно (рис.7). Нехай сторона AB перетинає ці кола у точках D_1, D_2 відповідно. тоді можемло записати такі рівності: $AB \cdot BD_1 = BC \cdot BA_1$, $AB \cdot AD_2 = AC \cdot AB_1$. Якщо додати ці рівності, одержимо, що $AB \cdot BD_1 + AB \cdot AD_2 = BC \cdot BA_1 + AC \cdot AB_1 = BC(BC - CA_1) + AC(AC - CB_1) = BC^2 + AC^2 - (BC \cdot CA_1 + AC \cdot CB_1) =$ (і із заданої умови $BC \cdot AC = BC \cdot CA_1 + AC \cdot CB_1$) можемо продовжити ці рівності таким чином

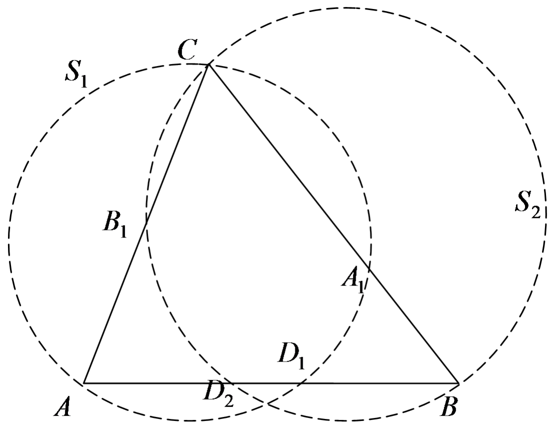


Рис.7

$= BC^2 + AC^2 - AC \cdot BC = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C = AB^2 \Rightarrow BD_1 + AD_2 = AB$, тобто $D_1 = D_2$, що й треба було довести.