Задание 2011.8

Задачи на последовательности.

Задача 1. Последовательность $a_k, k \geqslant 1$ задана так: $a_1 = 1$ и $a_k = a_{k-1} + a_{[k/2]}$ при $k > 1$. Докажите, что ни один её член не делится на 4.

Задача 2. Пусть F — непустое конечное подмножество $\mathbb{Z}$, симметричное относительно 0, причём числа в F взаимно просты в совокупности. Последовательность $a_n, n \in \mathbb{Z}$ назовём F-супергармонической, если для любого целого n выполнено $a_n \geqslant \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} a_{n+f}$.

Например, если $F = \{-1, 1\}$, то F-супергармонические последовательности это супергармонические на $\mathbb{Z}$ функции.

Докажите, что если F-супергармоническая последовательность неотрицательна, то она постоянна.

Задача 3. Пусть $F_n, n \geqslant 1$ — последовательность чисел Фибоначчи, т.е. $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Докажите, что

(1) для любого натурального m существует F_k, делящийся на m;
(2) $F_{mn-1} - F_{n-1}^m$ делится на F_n^2;
(3) $F_{mn} - F_{n+1}^m + F_{n-1}^m$ делится на F_n^3;
(4) $gcd(F_m, F_n) = F_{gcd(m,n)}$, где $gcd(m, n)$ обозначает наибольший общий делитель m, n.

Задача 4. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Определим последовательность u_n, $n \geqslant 1$ так: $u_1 = 1$ и $u_{n+1} = au_n + b$. Докажите, что в последовательности u_n бесконечно много составных чисел.

Задача 5. Пусть $f(n) = n + [\sqrt{n}]$. Для натурального числа m определим последовательность $a_0 = m$, $a_{k+1} = f(a_k)$, $k \geqslant 0$. Докажите, что в последовательности a_k бесконечно много точных квадратов.

Задача 6. Последовательность a_n, $n \geqslant 1$ задана так: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 1$. Докажите, что все a_n целые.

Задача 7. Последовательность a_n, $n \geqslant 1$ задана так: $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$. Докажите, что все a_n целые.

Задача 8. Последовательность $a_n, n \geqslant 1$ задана так: $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + \sqrt{5a_n^2 - 4})$. Докажите, что все a_n целые.

Задача 9. Пусть $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}]$. Найти все n для которых a_n является точным квадратом.