Алгебра

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

1. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Вася берёт два числа a и b из написанных на доске, стирает их и пишет число $a+b+ab$. Операция продолжается до тех пор, пока на доске не будет написано одно число. Какое число останется?

2. Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству
$$a^2b^2(a^2b^2+4) = 2(a^6+b^6).$$
Докажите, что хотя бы одно из этих чисел иррационально.

3. Пусть a, b, c, d, e, f — некоторые ненулевые числа. Известно, что
$$|ax+b| + |cx+d| = |ex+f|,$$
при любом x. Докажите, что $ad = bc$.

4. Для чисел a, b, c, d известно, что
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}.$$
Доказать, что $a = c$ и $b = d$.

5. Известно, что число S имеет такое свойство: если для любых a, b, c, d не равных 0 или 1 выполняется $a+b+c+d = S$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = S$, то $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d} = S$. Найдите S.

6. Число N, не делящееся на 81, представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно также представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, которые не делятся на 3.

7. Числа a, b, c таковы, что $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2008$ и $a \neq b$. Найдите значение выражения $c^2(a+b)$.

8. Докажите, что если $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$, то $x+y = 0$.

9. Докажите тождество
$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)} = \frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} + \cdots + \frac{a_1}{a_n(a_1+a_n)}.$$

10. Числовое множество M, содержащее 2014 числа таково, что для любых двух различных элементов a, b из M число $a^2+b\sqrt{2}$ является рациональным. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ является рациональным.

11. Известно, что числа x^3, x^2+x являются рациональными. Докажите, что x рационально.

12. Числовое множество M, содержащее 2014 числа таково, что для любых двух различных элементов a, b, c из M число a^2+bc является рациональным. Докажите, что найдётся такое n, что для любого a из M число $a\sqrt{n}$ является рациональным.

13. Числа a, b, c таковы, что
$$(a+b)(b+c)(a+c) = abc,$$
$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = (abc)^3.$$
Докажите, что $abc = 0$.

14. Известно, что

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k.$$

Найдите

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}.$$

15. Разбить $\mathbb{R}$ на непересекающиеся пары чисел.

16. Найдите

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}.$$

17. Сравните два числа

$$\frac{2^2-1}{2^2+1}+\cdots+\frac{99^2+1}{99^2-1}$$

и $99,48$.

18. Известно, что $a+b+c=0$. Найдите

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

$(a,b,c\neq 0)$.

19. Даны числа $a_1,\ldots a_n$. Пускай $S_i=a_1+\cdots+a_i$. Известно, что для любых $1\leq m,k\leq n$ выполняется

$$\frac{S_m}{S_k}=\frac{m^2}{k^2}$$

. Докажите, что для любых $1\leq m,k\leq n$ $\frac{a_m}{a_k}=\frac{2m-1}{2k-1}$.

20. Известно, что у пар уравнений $x^2+ax+1=0, x^2+bx+c=0$; $x^2+x+a=0, x^2+cx+b=0$ есть общий корень. Найдите $a+b+c$.

21. Известно, что $a^3=6(a+1)$. Докажите, что уравнение $x^2+ax+a^2-6=0$ не имеет решений.

22. Найдите все такие положительные числа a,b что

$$2(a^2+1)(b^2+1)=(a+1)(b+1)(ab+1).$$

23. Даны разные числа a,b,c,x,y, такие что

$$a^3+ax+y=0,$$

$$b^3+bx+y=0,$$

$$c^3+cx+y=0.$$

Докажите, что $a+b+c=0$.

24. Известно, что $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$. Докажите, что $x+y=10$.

25. Найдите все положительные числа a, b, c, d такие, что

$$\begin{cases} a+b+c+d=20, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=150. \end{cases}$$

/item Про числа a, b, c, d известно, что

$$abc-d=1, \quad bcd-a=2, \quad cda-b=3, \quad dab-c=-6.$$

Докажите, что $a+b+c+d \neq 0$.

26. Даны положительные числа a, b, c, d, такие что $cd=1$. Докажите, что существет натуральное n, такое что $ab \leq n^2 \leq (a+c)(b+d)$.

27. Квадрат разрезан на прямоугольники. В каждом из прямоугольников выбрали меньшую сторону. Докажите, что сумма выбраных чисел больше либо равна 1.

28. Дана последовательность чисел a_n. Известно, что $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = \frac{2}{a_{n+1}} + a_n$. Найдите a_{2014}.

29. Докажите, что из набора $0, 1, 2, ..., 3^k - 1$ можно выбрать 2^k чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других выбранных чисел.

30. Даны числа $a_1, a_2, a_3 > 1$. Известно, что $\frac{a_i^2}{a_i - 1} > a_1 + a_2 + a_3$ для $i = 1, 2, 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_1+a_3} > 1.$$

31. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ определена такими соотношениями:

$$f(1) = 1,$$

$$f(4k) = f(2k)$$

$$f(4k+2) = 2f(2k+1),$$

$$f(4k+1) = 2f(2k)+1,$$

$$f(4k+3) = f(2k+1).$$

Найдите количество таких $n \leq 2047$, для которых $f(n) = f(2011)$.

32. Даны разные числа a, b, c, такие что

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = t.$$

Докажите, что $abc + t = 0$.

33. Докажите неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n^2} \{k\} \leq \frac{n^2-1}{2}.$$

34. Про натуральные числа x, y известно, что $x^3 + xy^2 - yx^2 - y^3 \neq 0$. Докажите, что число

$$\frac{(x+y)^2}{x^3+xy^2-yx^2-y^3}$$

не является целым.

35. Действительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ac}=1.$$

Найдите значение выражения

$$\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right|+\left|\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right|+\left|\frac{c^2+a^2-b^2}{ac}\right|=1.$$

36. Вычислить значение выражения

$$\frac{\sum_{k=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{n}}}{\sum_{k=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{n}}}.$$