Подібність 2: вектори

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Точки K, M; L, N відмічені на сторонах AB та AC трикутника ABC відповідно так, що K лежить між M та B, а L лежить між N та C. Якщо $\frac{BK}{KM} = \frac{CL}{LN}$, то доведіть, що ортоцентри трикутників ABC, AKL та AMN лежать на одній прямій.

2. Нехай $ABCD$ – опукдий чотирикутник. На сторонах AD та BC відмічені точки P та Q відповідно так, що $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC} = \frac{AB}{CD}$. Доведіть, що пряма PQ утворює рівні кути з прямими AB та CD.

3. Рівнобедрені трикутники ACO_2, ABO_3 побудовані на сторонах трикутника ABC як на основах зовні трикутника. Нехай O_1 – точка зовні трикутника ABC така, що $\angle O_1CB = \frac{1}{2}\angle AO_3B$ і $\angle O_1BC = \frac{1}{2}\angle AO_2C$. Доведіть, що $AO_1 \perp O_2O_3$, і якщо T – проекція O_1 на BC, тоді $\frac{AO_1}{O_2O_3} = \frac{2O_1T}{BC}$.

4. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник і $AB \nparallel CD$. Всередині чотирикутника відмічена точка X така, що $\angle ADX = \angle BCX < 90^\circ$ і $\angle DAX = \angle CBX < 90^\circ$. Серединні перпендикуляри до сторін AB та CD перетинаються в точці Y. Доведіть, що $\angle AYB = 2\angle ADX$.

5. Вершини A, B, C гострокутного трикутника ABC лежать на сторонах B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 відповідно, трикутника $A_1B_1C_1$ подібного до ABC ($\angle A = \angle A_1$ і т. д.). Доведіть, що ортоцентри трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ рівновіддаленні від центру описаного кола трикутника ABC.

6. Нехай M – середина сторони BC трикутника ABC. Зовнішня бісектриса кута $\angle BAC$ перетинає пряму BC в точці D. Описане коло трикутника ADM перетинає прямі AB та AC в точках E та F відповідно, N – середина EF. Доведіть, що $MN \parallel AD$.

7. В гострокутному трикутнику ABC на сторонах AC та BC відмічені точки M та N відповідно, K – середина MN. Описані кола трикутників ACN та BCM перетинаються в точках C та D. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника ABC, лежить на прямій CD тоді та тільки тоді коли точка K лежить на серединному перпендикулярі до AB.

8. Два кола S_1 та S_2 перетинаються в точках A та B. Пряма, що проходить через A перетинає S_1 та S_2 в точках C та D відповідно. Точки M, N та K лежать на відрізках CD, BC та BD відповідно так, що $MN \parallel BD$ і $MK \parallel BC$. Нехай точки E, F лежать на дугах BC та BD кіл S_1 та S_2 відповідно. що не містять точку A. Доведіть, що якщо $EN \perp BC$ і $FK \perp BD$, то $\angle EMF = 90^\circ$.

9. На сторонах AB та BC паралелограма $ABCD$ відмічені точки A_1 та C_1 відповідно; P – точка перетину AC_1 та CA_1. Кола, описані навколо трикутників AA_1P, CC_1P перетинаються другий раз в точці Q, що лежить всередині трикутника ACD. Доведіть, що $\angle PDA = \angle QBA$.

10. Нехай P – довільна точка на дузі BC описаного кола трикутника ABC, що не містить точку A. Нехай I_1 та I_2 – інцентри трикутників PAB та PAC відповідно. Доведіть, шо:
а) Кола, описані навколо трикутників PI_1I_2, проходять через фіксовану точку.
б) Кола з діаметром I_1I_2 проходять через фіксовану точку.
в) Середини відрізків I_1I_2 лежать на фіксованому колі.

11. Нехай ABO та A_0B_0O – два рівносторонніх трикутника, причому $A_0 \neq S$ і $B_0 \neq S$, де S – центр трикутника ABO, і кути A_0OB_0, AOB мають однакову орієнтацію. Нехай M – середина A_0B і N – середина AB_0. Доведіть, що трикутники SB_0M та SA_0N подібні.

12. Чотирикутник $ABCD$ має перпендикулярні діагоналі. Квадрати $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$ та $DAKL$ побудовані зовні чотирикутника. Прямі CL та DF; DF та AH; AH та BJ; BJ та CL перетинаються в точках P, Q, R та S відповідно. Прямі AI та BK; BK та CE; CE та DG; DG та AI перетинаються в точках P', Q', R' та S' відповідно. Доведіть, що чотирикутники $PQRS$ та $P'Q'R'S'$ рівні.

13. Нехай AA_0, BB_0, CC_0 – діаметри кола, описаного навколо трикутника ABC; P – довільна точка всередині трикутника; D, E, F – основи перпендикулярів, опущенних з точки P на прямі BC, CA та AB відповідно. Точки X, Y, Z – симетричні точкам A_0, B_0, C_0 відносно точок D, E, F відповідно. Доведіть, що трикутник XYZ подібний до трикутника ABC.

14. На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC вибрані точки A_1, B_1, C_1 відповідно. Кола, описані навколо трикутників AB_1C_1, BC_1A_1 та CA_1B_1, перетинають коло описане навколо трикутника ABC, другий раз в точках A_2, B_2 та C_2 відповідно. Точки A_3, B_3, C_3 симетричні точкам A_1, B_1, C_1 відносно середин сторін BC, CA, AB відповідно. Доведіть, що трикутники $A_2B_2C_2$ та $A_3B_3C_3$ подібні.

15. Всередині трикутника ABC відмічені ізогонально спряжені точки P та Q. Позначимо за O_1, O_2, O_3, O'_1, O'_2, O'_3, O, O' – центри описаних кіл трикутників PBC, PCA, PAB, QBC, QCA, QAB, $O_1O_2O_3$, $O'_1O'_2O'_3$ відповідно. Доведіть, що $OO' \parallel PQ$.