Китайська теорема про остачі (дз. 8 клас)

+ 1) Довести, що для $(m,n)=1$ рівність $a \equiv b \pmod{mn}$ рівносильна системі рівностей $a \equiv b \pmod{m}$ та $a \equiv b \pmod{n}$.
+ 2) Знайти остачу $14^{14^{14}}$ по модулю 100.
+ 3) Знайти остачу 2^{245} по модулю 35.
+ 4) Розв»язати рівняння:
   - $19x \equiv 12 \pmod{40}$
   - $5x+14 \equiv 3x+8 \pmod{15}$
   - $67x \equiv 5^{910} + 2^5 \pmod{101}$
+ 5) Розв»язати систему $\begin{cases} 3x+17 \equiv 0 \pmod{23} \\ 14x+8 \equiv 6 \pmod{16} \\ 13x \equiv -5 \pmod{17} \end{cases}$
+ 6) Знайти найменше натуральне число, яке дає остачі 1,2,3,4 по модулям 5, 7, 11, 12.
+ 7) Про число x відомо, що x^2 закінчується на 001. Якими можуть бути останні 3 цифри числа x.
+ 8) Знайдіть всі трицифрові x, що останні 3 цифри x^2 співпадають з x.
Чи існує така нескінченна послідовність цифр $a_1, a_2, a_3, \ldots$, що для довільного n квадрат числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$ закінчується на це ж число? (Комбінацію $a_1 = 1,\ 0 = a_2 = a_3 = \ldots$ не розглядаємо).
+ 9) Для яких n існують $b_1, .., b_n$ не всі рівні між собою, що для довільного натурального k число $(b_1+k)(b_2+k)\ldots(b_n+k)$ - степінь натурального числа?
+ 10) Довести, для довільного n, існують n послідовних чисел, кожне з яких не є степенем натурального числа з показником >1.
+ 11) Нехай $b_1, b_2, .., b_n$ - натуральні числа більші 1. Довести, що існує B, що кожне з чисел $Bb_1, Bb_2, \ldots, Bb_n$ є степенем деякого натурального числа (з показником >1).
+ 12) Довести, що серед довільних 16 послідовних натуральних чисел є число взаємнопросте з іншими.

1