Канікулярне домашнє завдання

90% зроблених задач — з ймовірністю 90% у вас перший диплом на міській;
80% зроблених задач — з ймовірністю 80% у вас другий диплом на міській;
60% зроблених задач — з ймовірністю 60% у вас третій диплом на міській.

Задача вважається розв'язаною, якщо протягом 5хв ви зможете відтворити її розв'язок. Якщо в задачі вимагається відповідь, то вона у вас має бути записана.

1. Теорія чисел

1. Числа 2^n і 5^n записані одне за одним. Скільки цифр має одержане число?
2. Знайти усі трицифрові числа, що дорівнюють сумі факторіалів своїх цифр.
3. Довести, що рівняння $x^3 + y^4 = 7$ не має розв'язків в цілих числах.
4. Знайти усі трійки натуральних чисел (x, y, z), що $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$.
5. Знайти усі трійки натуральних чисел (x, y, z), що $(x + y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$.
6. Довести, що не існує натуральних чисел x, y, z, t таких, щоб одночасно виконувалися рівняння $x^2 + 2y^2 = z^2$ і $2x^2 + y^2 = t^2$.
7. Довести, що для всіх простих p число $\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p}-123\ldots9$ ділиться на p.

2. Геометрія

1. З довільної точки M, що лежить всередині кута з вершиною A, опущені перпендикуляри MP і MQ на сторони кута. З точки A опущено перпендикуляр AK на відрізок PQ. Довести, що $\angle PAK = \angle MAQ$.
2. Два кола перетинаються в точках P і Q. Через точку A першого кола провели прямі AP і AQ, які перетинають друге коло в точках B і C. Довести, що дотична в точці A до першого кола паралельна прямій BC.
3. На колі обрано три точки A, B, C так, що $\angle BAC = 70°$. Через точки B і C проведені дотичні, які перетинаються в точці M. Знайти $\angle BMC$.
4. У трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і BB_1. На стороні AB обрано точки K і M так, що $B_1K \parallel BC$ і $A_1M \parallel AC$. Довести, що $\angle AA_1K = \angle BB_1M$.

3. Нерівності

1. Для додатних чисел a і b довести нерівність $\dfrac{1 + 3a\sqrt[3]{b}}{b} + \dfrac{1 + 3b\sqrt[3]{a}}{a} \geqslant 8$.

2. Для додатних чисел $a_1, a_2 \ldots, a_n$ довести нерівність

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n^3}{a_1} \geqslant a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{2}\big((a_1+1)^2 + \cdots + (a_n+1)^2\big) - n.$$

3. Для невід'ємних чисел a, b, c довести нерівність $abc \geqslant \min\{1, a^3, b^4, c^5\}$.

4. Для дійсного x довести нерівність $x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 \geqslant 0$.

5. Для додатних чисел $x_1, \ldots, x_n$ таких, що $x_1 + \cdots + x_n = 1$, довести нерівність

$$\frac{1+x_1}{1-x_1}\,\frac{1+x_2}{1-x_2}\ldots\frac{1+x_n}{1-x_n} \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

4. Комбінаторика

1. Скількома способами можна розфарбувати грані куба шістьома фарбами так, щоб усі грані були зафарбовані різними кольорами? (Розфарбування куба, одержані внаслідок повороту, вважаємо однаковими. Для зануд: кольори змішувати не можна).

2. Таблицю 2011×2011 заповнили числами 1 і -1 так, що в кожному рядку і в кожному стовпчику добуток чисел дорівнює 1. Скількома способами можна це зробити?

3. У деякій країні будь-які два міста з'єднані або авіалінією, або залізницею. Довести, що можна вибрати вид транспорту так, щоб з кожного міста можна було дістатися в будь-яке інше місто, користуючись лише цим видом транспорту.

4. 20 команд зіграли круговий турнір з волейболу (кожна зіграла з кожною рівно один раз). Довести, що команди можна занумерувати числами від 1 до 20 так, що 1-ша команда виграла у 2-ої, 2-а — у 3-ої, …, 19-а — у 20-ої.

5. Різна алгебра

1. Обчисліть $[\sqrt{1}] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \cdots + \left[\sqrt{10000}\right]$.

2. a, b, c — цілі числа такі, що $a + b + c = 0$. Довести, що $2(a^4 + b^4 + c^4)$ — повний квадрат.

3. Многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами такий, що $|P(3)| = |P(7)| = 1$. Довести, що $P(x)$ не має цілих коренів.

4. Розкласти на множники $6x^4 + 6x^3 + x^2 - 2x - 1$.