

The 5th Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1: Friday, March 2, 2012, Bucharest

Language: Ukrainian

Задача 1. В компанії, що складається зі скінченної кількості хлопчиків і дівчаток, *товариською групою хлопчиків* назвемо таку групу хлопчиків, що кожна дівчинка знає хоча б одного хлопчика в цій групі; *товариською групою дівчаток* назвемо таку групу дівчаток, що кожен хлопчик знає хоча б одну дівчинку в цій групі. Доведіть, що кількість товариських груп хлопчиків та кількість товариських груп дівчаток мають однакову парність. (Знайомства вважаємо двосторонніми.)

Задача 2. Дано нерівнобедрений трикутник ABC . Нехай D , E та F позначають середини сторін BC , CA та AB відповідно. Описане коло трикутника BCF і пряма BE перетинаються вдруге в точці P , а описане коло трикутника ABE і пряма AD перетинаються вдруге в точці Q . Прямі DP і FQ перетинаються в точці R . Доведіть, що центроїд G трикутника ABC належить колу, описаному навколо трикутника PQR .

Задача 3. Кожне натуральне число пофарбовано червоним або синім кольором. Функція f , що визначена на множині натуральних чисел та приймає натуральні значення, має дві такі властивості:

- (a) якщо $x \leq y$, то $f(x) \leq f(y)$; і
- (b) якщо x , y та z — (не обов'язково різні) натуральні числа одного кольору і $x + y = z$, то $f(x) + f(y) = f(z)$.

Доведіть, що існує додатнє число a таке, що $f(x) \leq ax$ для всіх натуральних чисел x .

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Тривалість туру: $4\frac{1}{2}$ години.