The 5^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Day 2: Saturday, March 3, 2012, Bucharest

Language: Ukrainian

Задача 4. Доведіть, що існує нескінченно багато натуральних чисел n таких, що $2^{2^n+1}+1$ ділиться на n, а 2^n+1 не ділиться на n.

Задача 5. Задано натуральне число $n \geq 3$. Кожну клітинку квадратної таблиці розміром $n \times n$ пофарбовано одним з $\left[(n+2)^2/3\right]$ кольорів, причому кожен колір використано хоча б один раз. Доведіть, що існує прямокутник розміром 1×3 або 3×1, три клітинки якого пофарбовано в три різні кольори.

Задача 6. Нехай ABC трикутник і нехай I та O позначають його центри вписаного та описаного кіл відповідно. Нехай ω_A — коло, що проходить через точки B і C та дотикається до кола, вписаного в трикутник ABC; кола ω_B і ω_C визначаються аналогічно. Кола ω_B і ω_C перетинаються в точці A' відмінній від A; точки B' і C' визначаються аналогічно. Доведіть, що прямі AA', BB' і CC' перетинаються в точці, що належить прямій IO.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.
Тривалість туру: $4\frac{1}{2}$ години.