Тестовая подборка

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

1. Для действительных чисел $a, b, c > 1/2$ докажите неравенство
$$\frac{a^2}{2b-1} + \frac{b^2}{2c-1} + \frac{c^2}{2a-1} \geq 3.$$

2. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ число 1 можно представить в виде суммы n разных дробей вида $\frac{1}{m}$, где m — натуральное.

3. В треугольнике ABC проведены высоты, которые пересекаются в ортоцентре H. Отметим K — точку, симметричную H относительно прямой BC. Докажите, что K принадлежит описанной окружности треугольника ABC.

4. Найдите все пары целых неотрицательных чисел m и n, которые удовлетворяют равенству $mn - n + m = 2004$.

5. Дан правильный треугольник ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N так, что $MA = NB$. Докажите, что существует точка, через которую проходят все описанные окружности треугольников MBN, построенные в такой способ.

6. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, в которой BC — меньшая основа, точки M, N — середины сторон AB и AD соответственно, а отрезок BP — её высота. Отрезки DM и BN пересекаются в точке Q. Доказать, что точки P, Q, C лежат на одной прямой.

7. Докажите, что среднее арифметическое S всех натуральных делителей числа n удовлетворяет неравенству $\sqrt{n} \leq S \leq \frac{n}{2}$.

8. Докажите, что $n^3 - n^2 + n$ при натуральных $n > 1$ никогда не может быть полным квадратом.

9. В клетчатом квадрате размера 7×7 закрасили 29 клеток. Докажите, что найдутся три закрашенные клетки, образующие уголок (фигурку в виде квадрата 2×2 без единичного квадратика на какой-то позиции).

10. На доске написано число 2016. Двое играют в игру. Игроки ходят по очереди. Пусть перед ходом игрока на доске написано число n. Тогда его ход состоит в том, чтобы выбрать произвольный делитель d числа n, (но не равный n) и написать на доску число $n - d$, после чего стереть исходное число n. Проигрывает тот, кто не может походить по правилам. У кого из игроков есть выигрышная стратегия: у того, кто начинает, или его соперника?