Задание 2011.1

Тут задачи на производящие функции, а также на связь многочленов с комбинаторикой. Чтобы найти некоторую величину, подумайте про такое: надо рассмотреть какое-то произведение, при открытии скобок возникнет нужная величина.

Задача 1. Проверьте, что для производящих функций $F(x), G(x), H(x)$ выполнены равенства

(1) $F(x)G(x) = G(x)H(x)$,
(2) $(F(x)G(x))H(x) = F(x)(G(x)H(x))$,
(3) $F(x)(G(x) + H(x)) = F(x)G(x) + F(x)H(x)$.

Задача 2. Пусть F_1, F_2 две производящие функции. Предположим, для некоторой ненулевой производящей функции F выполнено $FF_1 = FF_2$. Докажите, что $F_1 = F_2$.

Задача 3. Используя двоичную запись числа, решите следующую задачу. Покажите, что в множестве $\mathbb{N}_0$ целых неотрицательных чисел можно найти подмножества A_1, A_2, такие, что

(1) $0 \in A_1, 0 \in A_2$,
(2) в каждом из A_1, A_2 более чем один элемент,
(3) $A_1 \bigcap A_2 = \{0\}$,
(4) каждое $a \in \mathbb{N}_0$ единственным образом представляется в виде $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$.

Задача 4. Докажите, что каждое натуральное число N можно записать, причём единственным образом, в троичной системе счисления, т.е. $N = a_0 + a_1 3 + \ldots + a_m 3^m$, где $a_k \in \{0, 1, 2\}$ и $a_m \neq 0$. Сформулируйте эту задачу на языке производящих функций и решите её методом производящих функций.

Задача 5. Постройте подмножество M множества натуральных чисел, обладающее следующим свойством: любое натуральное число, не принадлежащее M, есть средним арифметическим каких-то двух различных чисел из M, а никакое число из M этим свойством не обладает.

Задача 6. Найти коэффициенты при x^{17}, x^{18}, x^{25} у многочлена $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

Задача 7. Рассматриваются всевозможные непустые подмножества $\{1, 2, \ldots, N\}$. Для каждого подмножества рассмотрим величину, обратную к произведению всех его чисел. Найти сумму всех таких обратных величин.

Задача 8. Для каждого трёхзначного числа берём произведение его цифр, а затем эти произведения складываем. Сколько получится ? А если рассматривать n значные числа ?

Задача 9. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ натуральные числа, среди которых ровно k нечётных. Рассмотрим все произведения вида $a_{i_1} \ldots a_{i_s}$, где $s \geqslant 0$ чётно (если $s = 0$, то это произведение равно 1). Пусть S сумма всех таких произведений. Докажите, что S делится на 2^{k-1}.