Комбінаторика

1) Чи можна квадрат 13*13, без центральної клітинки розрізати на прямокутники 1*4 та 4*1?
2) Нехай на площині задано координатну сітку. Нехай А – обмежена фігура, площа якої більше n. Довести, що фігуру А можна паралельно перенести таким чином, щоб вона покрила $n+1$ цілочисельну точку. *(Теорема Бліхфельдта).*
3) Нехай А – симетрична відносно початку координат опукла фігура площі >4. Довести, що А містить точку з цілими координатами, відмінну від початку координат. *(Теорема Мінковського)*
4) Дошку 7*7 за вийнятком однієї клітини покривають прямокутниками 1*3 та 3*1. Яка клітинка може бути непокритою?
5) Серед n^2 осіб кожен має не більше n знайомих. Довести, що є n осіб, які попарно незнайомі.
6) Доведіть, що в довільній послідовності з $pq+1$ різних дійсних чисел є або зростаюча підпослідовність з $p+1$ числа, або спадаюча підпослідовність з $q+1$ числа.*(Задача Ердьоша).*
7) В волейюольному турнірі приймають участь $2n$ команд. Кожна гра закінчується перемогою однієї з команд. Турнір було проведено в $2n-1$ день, кожен день кожна команда грала рівно одну гру, та по завершенню турніра кожен з кожним зіграв рівно 1 гру. Чи обов»язково можна вибрати кожного дня по одній команді, що виграла в цей день, так щоб всі вибрані команди були різними?
8) По колу стоять n різних предметів. Знайдіть кількість способів вибрати k з них, щоб жодні 2 з вибраних не стояли поруч.
9) В деякій групі людей довільні двоє знайомих не мають спільних знайомих, а кожні 2 незнайомі мають рівно 2 спільних знайомих. Доведіть, що в цій групі всі мають однакову кількість знайомих.
10) Всі ребра зв'язного графа пофарбовані в 2 кольори. З кожної вершини виходить порівну ребер обох кольорів. Доведіть, що з довільної вершини до будь-якої іншої можна дістатись кожного разу змінюючи колір ребра.
11) Дано зв'язний граф, який залишається зв'язним при видаленні довільного ребра. Двоє гравців по черзі ставлять стрілки на ребрах (на кожному не більше 1). Програє гравець після ходу якого з деякої вершини неможливо дістатися до іншої рухаючись лише по напрямкам стрілок та по ребрам без стрілок. Доведіть, що при правильній грі обох гравців, гра завершиться нічиєю.
12) Розфарбування графа називається *правильним* якщо довільні дві вершини, з'єднані ребром пофарбовані в різний колір.
    - В графі степені всіх вершин не більше k. Доведіть, що його можна правильно розфарбувати в $k+1$ колір.
    - Вершини деякого графа неможна розфарбувати правильним чином менше ніж в k кольорів. Доведіть, що для довільного правильного розфарбування вершин в k кольорів існує шлях, в якому зустрічається рівно по одній вершині кожного кольору.
    - В графі максимальний непарний простий цикл (цикл без самоперетинів) має довжину l. Доведіть, що граф можна првильно пофарбувати в $l+1$ колір.

- *(Теорема Брукса)** В графі степінь кожної вершини не більше d і немає повного підграфа на $d+1$ вершині. Доведіть, що його можна розфарбувати в d кольорів.

13) Вершини A і B не з'єднані ребром, та при видаленні добільних $k-1$ ребра A і B залишаються зв'язними. Доведіть, що існує k шляхів з A в B, що не мають проміжних спільних вершин. *(Теорема Менгера)*
14) З графом дозволяється робити таку операцію: обрати довільний цикл довжини 4 і викинути з нього довільне ребро.Дано повний граф на n вершинах. Яку найменшу кількість ребер можна залишити за допомогою цієї операції?
15) k-кліка - це підмножина з k попарно зв'язаних вершин. Відомо, що довільні 2 3-кліки мають спільну вершину та немає 5-кліки. Довести, що можна видалити 2 вершини та розрушити всі 3-кліки.
16) Для довільного $n>2$ побудуйте таку множину з 2^{n-1} точок площини, що ніякі 3 з них не лежать на одній прямій і жодні $2n$ не утворюють опуклий $2n$-кутник.
17) Нехай n натуральне. Тоді серед довільних $2n-1$ цілого числа можна обрати n з сумою кратною n *.(Ердьош-Гіденбург-Зів)*
18) На прямій дано $2k-1$ чорний та $2k-1$ білий відрізок. Відомо, що довільний білий відрізок перетинається хоча б з k чорними, а довільний чорний хоча б з k білими. Доведіть, що існує чорний, що перетинає всі білі та білий, що перетинається з усіма чорними.
19) На прямокутному столі лежать рівні картонні квадрати k різних кольорів, зі сторонами паралельними сторонам стола. Якщо розглянути довільні k квадратів різних кольорів, то деякі 2 з них можна прибити до столу одним цвяхом. Доведіть, що всі квадрати деякого кольору можна прибити до столу $2k-2$ цвяхами.
20) Два альпініста стоять на рівні моря на протилежних сторонах гірського хребта, що цілком розташована над рівнем моря. Доведіть, що вони можуть зустрітися постійно залишаючись на однаковій висоті. *(Задача про альпіністів ☺)*
21) Для множин A та B визначається множина $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$. Тоді для всякого простого p та довільних $A,B\subseteq Z_p$ виконано:

    $|A+B|\geq \min\{p,|A|+|B|-1\}$ *(Коші-Девенпорт)*