IX Київський відкритий турнір математичних боїв ім. Лесі Рубльової

Третій тур

Умови задач

Молодша ліга. Група «А»

1. Додатні числа a, b, c, m, n, p задовольняють умову $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{p}{c}$. Доведіть рівність

$$(ma+nb+pc)^2=(m^2+n^2+p^2)(a^2+b^2+c^2).$$

2. Знайдіть усі пари цілих чисел (a, b), які задовольняють рівність

$$a^2+2ab+2b^2=13.$$

3. Усередині квадрата $ABCD$ позначено таку точку E, що трикутник BCE рівнобедрений із кутом $150°$. Знайдіть градусну міру кута $\angle ADE$.

4. На рис. 1 зображено правильний п'ятикутник із проведеними діагоналями. Який із двох відрізків, наведених на рисунку товстою лінією, довший?

Многокутник називається правильним, якщо всі його кути рівні і всі сторони мають однакову довжину.

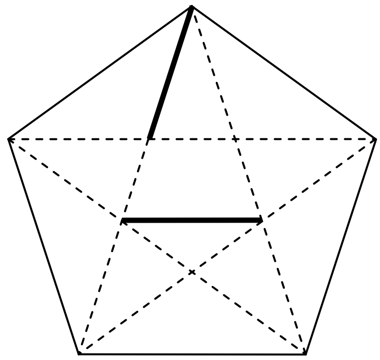

Рис. 1

5. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $2x^3-y^2=3$.

6. Нехай цифри деякого числа A попарно різні і серед них немає нуля. Якщо середнє арифметичне всіх чисел, які можна утворити з числа A шляхом перестановки його цифр, збігається із самим числом A, назвімо число A феноменальним. Знайдіть усі трицифрові феноменальні числа.

7. Яку найбільшу кількість шахових королів можна розставити на дошці 12×12 таким чином, щоб кожен король був під ударом рівно одного іншого короля?

8. На аркуші в клітинку позначили 100 вузлів сітки — усі вузли, що містяться строго всередині деякого квадрата 11×11, чиї сторони проходять по лініях сітки. Із лівого нижнього позначеного вузла у правий верхній проводять по лініях сітки ламані найменшої можливої довжини. Яку найменшу кількість таких ламаних треба провести, щоб через кожен зі 100 позначених вузлів пройшла хоча б одна ламана?

Молодша ліга. Група «Б»

1. Нехай a та b — натуральні числа. Доведіть, що число a^2+ab+b^2 є дільником числа $(a+b)^6-a^6$.

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» молодшої ліги.*

4. Точки A, B, C, D розташовані, як показано на рис. 2. Відомо, що $AB=AC$, $AD=BD$ і $\alpha+\beta=250°$. Знайдіть градусну міру кута $\angle DBC$.

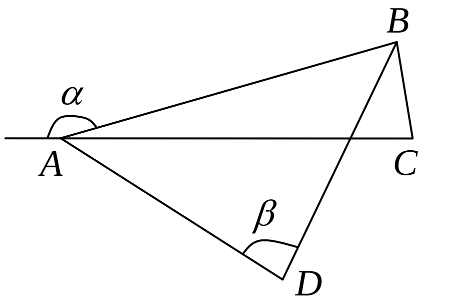

Рис. 2

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. Знайдіть найбільший простий дільник числа 1 001 001 001.

7. Чи можна деякі з чисел 1, 2, 3, …, 20 записати на одному боці аркуша, а решту чисел — на іншому боці аркуша, так щоб ніякі два числа, записані з одного боку аркуша, не давали в сумі жодне з чисел 4, 5, 9, 14, 23 або 37?

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Молодша ліга. Сьомі класи

1. На клумбі ростуть білі, жовті й рожеві троянди. Жовтих троянд більше, ніж білих, але принаймні втричі менше, ніж рожевих. Разом білих і жовтих квітів понад 50. Яка найменша кількість рожевих троянд може рости на клумбі?

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. Усередині квадрата *ABCD* позначено такі точки *E* та *F*, що трикутники *BCE* і *CDF* рівнобедрені з кутом 150°. Доведіть, що трикутник *CEF* рівносторонній.

4. *Задача № 4 групи «Б» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «Б» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «Б» молодшої ліги.*

8. На шахівниці 8×8 розставлено 20 тур, причому кожне з 64 полів дошки або містить туру, або перебуває під ударом хоча б однієї тури. Доведіть, що з дошки можна прибрати 12 тур, не порушивши цієї умови.

Тура — це шахова фігура, що б'є водночас усі поля на своїй горизонталі і всі поля на своїй вертикалі.

Середня ліга. Група «А»

1. Нехай *a*, *b* та *c* — сторони деякого трикутника. Доведіть нерівність

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{4b}{c+a-b}+\frac{9c}{a+b-c}\geqslant 11.$$

2. Послідовність (a_n) задано таким чином: $a_0=-1$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n-3}{3a_n-4}$, $n\geqslant 0$. Доведіть, що $3a_n-4\neq 0$, $n\geqslant 0$, і знайдіть значення a_{2012}.

3. Усередині трикутника *ABC* вибрали деяку точку *X*. Прямі *AX*, *BX* і *CX* перетинають описане коло трикутника *ABC* в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно (відмінних від *A*, *B*, *C*). Точки A_2, B_2 і C_2 симетричні до точок A_1, B_1 і C_1 відносно середин відрізків *BC*, *CA* та *AB* відповідно. За умови, що A_2, B_2 і C_2 — три різні точки, доведіть, що описане навколо трикутника $A_2B_2C_2$ коло проходить через певну фіксовану точку незалежно від вибору *X*.

4. Бісектриса *CD* трикутника *ABC* ділить сторону *AB* на відрізки $AD=1$ і $BD=3$. Яку найбільшу площу може мати трикутник?

5. Послідовність натуральних чисел (a_n) із деяким початковим членом a_1 задається рекурентно: $a_{n+1}=a_n+2\tau(n)$, $n\in\mathbb{N}$, де $\tau(n)$ позначає кількість натуральних дільників числа *n*. Чи можуть два сусідніх члени такої послідовності бути точними квадратами?

6. Знайдіть усі натуральні *n*, для яких число $(2^n+1)(3^n+2)$ ділиться на 5^n.

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. У Сашиній лабораторії живуть електронні хамелеони, і кожен із них з'єднаний дротами з непарною кількістю інших хамелеонів. Спершу частина хамелеонів мала жовте забарвлення, а решта тваринок були синіми. У межах Сашиного експерименту щодня опівночі кожен хамелеон набуває того кольору, в який протягом дня, що минув, була забарвлена більшість з'єднаних із ним хамелеонів. Доведіть, що рано чи пізно Сашин улюблений хамелеон, Дискримінант, або взагалі перестане змінювати

забарвлення, або почне міняти його з жовтого на синє і назад неперервно кожного дня.
Зауважте, що з'єднання дротом двостороннє, тобто якщо хамелеон А з'єднаний із хамелеоном Б, то й хамелеон Б з'єднаний із хамелеоном А.

Середня ліга. Група «Б»

1. Для довільних чисел *x*, *y* і *z* доведіть нерівність
$$x^8+4y^4+5z^2 \geqslant 8x^2yz.$$
2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*
3. Усередині квадрата *ABCD* зі стороною 1 вибрано точку *M*. Позначимо через *P*, *Q*, *R* і *T* точки перетину медіан трикутників *AMB*, *BMC*, *CMD* й *DMA* відповідно. Знайдіть площу чотирикутника *PQRT*.
4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*
5. Доведіть, що для натурального *N* число $8N+1$ є точним квадратом тоді й лише тоді, коли існує таке натуральне *n*, що $1+2+...+n=N$.
6. *Задача № 6 групи «А» середньої ліги.*
7. Двоє гравців накреслили на аркуші в клітинку горизонтальний прямокутник 1×12 і по черзі вписують у його порожні клітини довільні цифри (не обов'язково в порядку від першої клітинки до останньої). Доведіть, що гравець, який ходить другим, незалежно від ходів першого гравця зможе зробити так, щоб утворене після останнього 12-го ходу число було кратним 77. При цьому число може починатися нулями.
8. *Задача № 8 групи «А» середньої ліги.*

Старша ліга. Група «А»

1. Нехай $Q(x)$ — квадратична функція така, що многочлен $P(x)=x^2Q(x)$ зростає на проміжку $[0,+\infty)$. Доведіть, що для довільних чисел *x*, *y* і *z*, таких що $x+y+z>0$ та $xyz>0$, справджується нерівність $P(x)+P(y)+P(z)>0$.
2. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що для довільних дійсних *x* та *y* справджується рівність
$$f(x^2+y^2+2012xy)=x^2+y^2+2012f(x)f(y).$$
3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*
4. Знайдіть геометричне місце точок *X*, що містяться всередині або на межі правильного трикутника *ABC*, для яких
$$\sqrt{h_{AB}}+\sqrt{h_{BC}}+\sqrt{h_{CA}}=2\max\{\sqrt{h_{AB}},\sqrt{h_{BC}},\sqrt{h_{CA}}\},$$
де h_{AB}, h_{BC} й h_{CA} — відстані від точки *X* до відповідних сторін трикутника.
5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*
6. Доведіть, що рівняння $x^2+xy+6y^2=23z+5$ не має розв'язків у цілих числах.
7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*
8. Доведіть, що кожне натуральне число можна пофарбувати у жовтий або в синій колір таким чином, щоб водночас:
- не знайшлося жодної трійки чисел p^n, p^{n+1} та p^{n+2}, забарвлених однаково, де *p* — просте число, а *n* — натуральне;
- не існувало нескінченної геометричної прогресії з першим членом $b_1\in\mathbb{N}$ і знаменником $q\in\mathbb{N}$, $q\neq 1$, усі члени якої пофарбовані в один колір.

Старша ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*
2. *Задача № 2 групи «А» старшої ліги.*
3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*
4. У гострокутному трикутнику *ABC* проведено висоту *BH*. Виявилося, що центр кола, вписаного у трикутник *ABH*, збігається з точкою перетину медіан трикутника *ABC*. Знайдіть відношення площі трикутника *ABH* до площі трикутника *ABC*.
5. *Задача № 5 групи «Б» середньої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «А» старшої ліги.*
7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*
8. На площині позначили n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Доведіть, що кількість трикутників площі 1 з вершинами в позначених точках не більша за число $\frac{2(n^2-n)}{3}$.

Старша ліга. Група «В»

1. *Задача № 1 групи «Б» середньої ліги.*
2. *Задача № 2 групи «А» старшої ліги.*
3. *Задача № 3 групи «Б» середньої ліги.*
4. *Задача № 4 групи «Б» старшої ліги.*
5. *Задача № 5 групи «Б» середньої ліги.*
6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*
7. *Задача № 7 групи «Б» середньої ліги.*
8. *Задача № 8 групи «Б» старшої ліги.*

Відповіді та розв'язання

Молодша ліга. Група «А»

1. *Розв'язання.* Нехай $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{p}{c}=k$. Тоді $m=ka$, $n=kb$, $p=kc$ і

$$(ma+nb+pc)^2=(ka^2+kb^2+kc^2)^2=k^2(a^2+b^2+c^2)^2=$$
$$=(k^2a^2+k^2b^2+k^2c^2)(a^2+b^2+c^2)=(m^2+n^2+p^2)(a^2+b^2+c^2),$$

що й треба було довести.

2. *Відповідь:* $(-5,2)$, $(-5,3)$, $(-1,-2)$, $(-1,3)$, $(1,-3)$, $(1,2)$, $(5,-3)$, $(5,-2)$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $(a+b)^2+b^2=13$. Оскільки єдина пара квадратів, сума яких дорівнює 13, — це $4=2^2$ і $9=3^2$, маємо два варіанти: чи $a+b=\pm2$, а $b=\pm3$, чи $a+b=\pm3$, а $b=\pm2$. Обидва варіанти залежно від вибору знаків «$+$» або «$-$» дають по чотири системи рівнянь, а кожна з восьми систем дає, очевидно, по одному розв'язку початкового рівняння в цілих числах.

3. *Відповідь:* $60°$.

Розв'язання. Оскільки для довільної точки *E* всередині квадрата кути *BCE* та *CBE* гострі, кут $150°$ розташований при вершині *E* трикутника *BCE* (рис. 3). Позначимо всередині квадрата таку точку *F*, що трикутник *CDF* також рівнобедрений із кутом $150°$. Маємо, що $\angle ECB=\angle FCD=(180°-150°)/2=15°$, звідки

$$\angle ECF=\angle BCD-\angle ECB-\angle FCD=90°-2\cdot15°=60°.$$

З міркувань симетрії відрізки *CE* й *CF* рівні, що разом із рівністю $\angle ECF=60°$ означає, що трикутник *CEF* правильний. А тоді $DF=CF=EF$, тобто *DFE* рівнобедрений. Крім того, точка *F* лежить усередині трикутника *CDE*, бо

$$\angle DFC+\angle CFE=150°+60°=210°>180°.$$

Тепер можемо підрахувати кути:

$$\angle DFE=360°-\angle DFC-\angle CFE=150°,$$
$$\angle FDE=(180°-\angle DFE)/2=15°,$$
$$\angle ADE=\angle ADC-\angle FDC-\angle FDE=90°-2\cdot15°=60°.$$

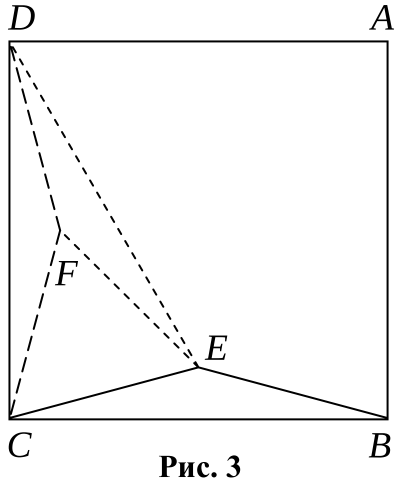

Рис. 3

4. *Відповідь:* відрізки рівні.

Розв'язання. Позначимо вершини п'ятикутника і кінці відрізків, як показано на рис. 4. З міркувань симетрії випливає, що відрізок *FG* паралельний до прямої *BD*. Тому $\angle AGF=\angle ADB$. Якщо повернути п'ятикутник так, щоб сторона *AB* наклалася на сторону *CD*, кут п'ятикутника *ADB* перейде в кут *CAD*. Тому $\angle ADB=\angle CAD$, звідки $\angle AGF=\angle CAD$. Це означає, що трикутник *AFG* рівнобедрений і $FG=AF$. Залишається додати, що — знов-таки з міркувань симетрії — $AF=CH$, а отже $FG=CH$.

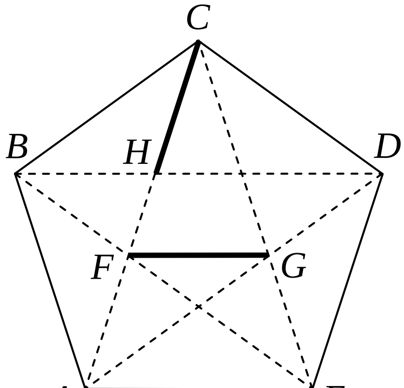

Рис. 4

5. *Відповідь:* розв'язків немає.

Розв'язання. Нехай (x,y) — деякий розв'язок рівняння $2x^3-y^2=3$ у цілих числах. Число *y* повинно бути непарним, бо $y^2=2x^3-3$ непарне. Тоді $y=2y_0+1$ для деякого цілого числа y_0. Підставивши це в початкове рівняння, матимемо

$$2x^3-(4y_0^2+4y_0+1)=3 \iff x^3-2y_0^2-2y_0=2.$$

Значить, число *x* парне, тобто $x=2x_0$ для деякого цілого x_0. Тоді

$$(2x_0)^3-2y_0^2-2y_0=2 \iff 4x_0^3-y_0^2-y_0=1 \iff 4x_0^3-y_0(y_0+1)=1.$$

Оскільки одне з чисел y_0 або y_0+1 обов'язково парне, ліва частина останньої рівності парна. Але права її частина непарна. Дістали суперечність. Отже, цілих розв'язків рівняння не має.

6. ***Відповідь:*** 481, 518, 592, 629.

Розв'язання. Зауважимо, що немає різниці, чи відносити самé число A до тих чисел, які можна утворити з A шляхом перестановки його цифр, чи не відносити: якщо середнє арифметичне деякого набору з n чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ дорівнює числу A, то середнє арифметичне набору з $n+1$ числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, A також дорівнює $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n+A}{n+1}=\dfrac{nA+A}{n+1}=A$; і навпаки. Тож можемо вважати, що A входить до набору чисел, середнє арифметичне яких ми рахуємо.

Нехай трицифрове число $A=\overline{abc}$ є феноменальним. Це означає, що

$$\frac{\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}}{6}=\overline{abc}\ \Leftrightarrow\ \frac{222(a+b+c)}{6}=100a+10b+c\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 37(a+b+c)=100a+10b+c\ \Leftrightarrow\ 27b+36c=63a\ \Leftrightarrow\ 3b+4c=7a\ \Leftrightarrow\ 4(c-b)=7(a-b).$$

З останньої рівності випливає, що різниця $c-b$ ділиться на 7. Оскільки b та c — ненульові цифри і до того ж за умовою $b\ne c$, то або $c-b=7$, або $c-b=-7$:

— Якщо $c-b=7$, то $a-b=\dfrac{4(c-b)}{7}=4$. Із рівності $c-b=7$ або $c=8$ і $b=1$, або $c=9$ і $b=2$. Відповідно у першому випадку $a=b+4=5$, а в другому — $a=b+4=6$.

— Якщо $c-b=-7$, то $a-b=\dfrac{4(c-b)}{7}=-4$. Із рівності $c-b=-7$ або $c=1$ і $b=8$, або $c=2$ і $b=9$. Відповідно у першому випадку $a=b-4=4$, а в другому — $a=b-4=5$.

7. ***Відповідь:*** 56.

Розв'язання. Уявімо, що в дошки 12×12, на якій ми певним чином розставили королів, з'явився додатковий рядок знизу і додатковий стовпчик справа, тобто вона перетворилася на дошку 13×13. Оскільки кожен король б'є рівно одного іншого короля, всі королі стоять парами (різні пари можуть стояти по горизонталі, по вертикалі чи по діагоналі). Занумеруємо кожну пару королів числами від 1 до n, де n — загальна кількість пар. Для кожної зі 169 клітинок дошки 13×13 проведемо таку операцію: якщо у самій клітинці $(i,\ j)$, у клітинці над нею $(i-1,\ j)$, у клітинці ліворуч від неї $(i,\ j-1)$ або в клітинці зліва зверху від неї $(i-1,\ j-1)$ є король, який належить парі k, пофарбуємо клітинку $(i,\ j)$ у колір k. Жодну клітинку не буде пофарбовано у два різних кольори, бо інакше королі з двох відповідних пар містилися б в одному й тому ж квадраті 2×2, тобто били б один одного. У той же час для кожної пари королів k буде або 6 клітинок, пофарбованих у колір k (якщо королі стоять по горизонталі чи по вертикалі), або 7 клітинок (якщо королі стоять по діагоналі). Таким чином, на дошці помістяться клітинки щонайбільше $\left[\dfrac{169}{6}\right]=28$ різних кольорів, тобто королів буде не більше за $2\cdot28=56$.

Залишається навести приклад розташування 56 королів, яке задовольняє умову — на рис. 5 клітинки, де мають стояти королі, зафарбовано сірим кольором. З огляду на вищенаведені міркування, потрібний приклад можна побудувати, розмістивши 28 прямокутників 2×3 і 3×2 на дошці 13×13.

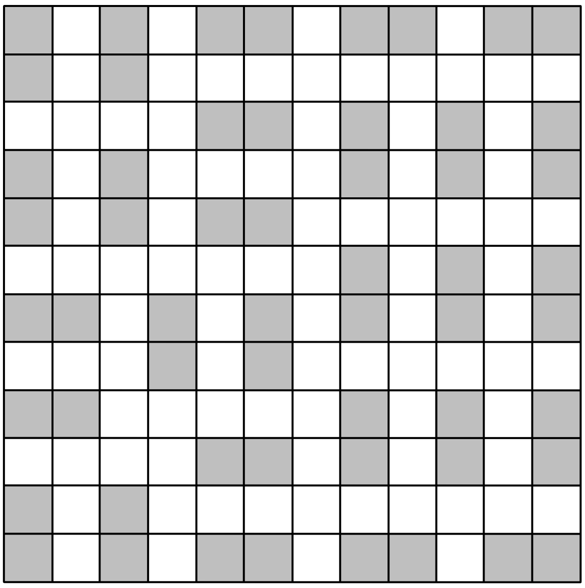

Рис. 5

8. ***Відповідь:*** 10.

Розв'язання. Зрозуміло, що ламані найменшої можливої довжини — це ті й лише ті, кожна ланка яких, якщо йти у напрямку від лівого нижнього вузла до правого верхнього, веде праворуч або вгору.

Розгляньмо діагональ від лівого верхнього вузла до правого нижнього і ті 10 вузлів, які на ній роз-

ташовані. Через жодні два з цих вузлів не може проходити одна й та сама ламана, адже, щоб дійти з одного вузла діагоналі в інший її вузол, треба рухатися або ліворуч (і вгору), або вниз (і праворуч). Отже, щоб покрити кожен із 10 вузлів, які ми розглядаємо, потрібно провести щонайменше 10 різних ламаних.
З іншого боку, 10 ламаних можна провести так, щоб покрити всі 100 позначених вузлів: достатньо, наприклад, першу ламану провести через нижній ряд вузлів, другу ламану — через другий знизу ряд, …, десяту ламану — через верхній ряд позначених вузлів.

Молодша ліга. Група «Б»

1. ***Розв'язання.*** Скористаймося формулами для різниці квадратів і суми кубів двох чисел:
$$(a+b)^6-a^6=((a+b)^3-a^3)((a+b)^3+a^3)=((a+b)^3-a^3)((a+b)+a)((a+b)^2-a(a+b)+a^2).$$
Це означає, що $(a+b)^6-a^6$ ділиться на
$$(a+b)^2-a(a+b)+a^2=a^2+2ab+b^2-a^2-ab+a^2=a^2+ab+b^2,$$
що й треба було довести.

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» молодшої ліги.*

4. ***Відповідь:*** $35°$.
Розв'язання. Оскільки трикутник ABC рівнобедрений, $\angle ABC=\angle ACB=(180°-\angle BAC)/2=\alpha/2$. Оскільки трикутник ABD також рівнобедрений, $\angle DBA=\angle DAB=(180°-\angle ADB)/2=(180°-\beta)/2$. Тому $\angle DBC=\angle ABC-\angle DBA=\alpha/2-(180°-\beta)/2=(\alpha+\beta)/2-90°=125°-90°=35°$.

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. ***Відповідь:*** 9901.
Розв'язання. Проведімо кілька перетворень і скористаймося з формули для суми кубів двох чисел:
$$1\,001\,001\,001=1001\cdot10^6+1001=1001\cdot(100^3+1^3)=1001\cdot(100+1)(100^2-100+1)=1001\cdot101\cdot9901.$$
Треба показати, що число 9901 — просте. Це, очевидно, означатиме, що воно є найбільшим простим дільником числа 1 001 001 001. Достатньо перебрати всі прості числа, які не перевищують $\sqrt{9901}<100$ і пересвідчитися, що жодне з них число 9901 не ділить: якби дільником числа 9901 було деяке число a, більше від $\sqrt{9901}$, але менше від самого 9901, то дільником було б і число $\frac{9901}{a}<\sqrt{9901}$, відмінне від одиниці, чого, як випливатиме з результатів перебору, бути не може.
Отже, залишається поділити у стовпчик число 9901 на кожне з 25 простих чисел, менших від 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 і 97.

7. ***Відповідь:*** можна.
Розв'язання. На одному боці аркуша можна записати числа 1, 2, 5, 6, 10, 11, 14, 15, 16, 19, 20, а на іншому боці — 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, 17, 18. Щоб переконатися, що такий розподіл чисел задовольняє умову задачі, випишемо всі можливі розбиття на два доданки чисел 4, 5, 9, 14, 23 і 37:
$$4=1+3,$$
$$5=1+4=2+3,$$
$$9=1+8=2+7=3+6=4+5,$$
$$14=1+13=2+12=3+11=4+10=5+9=6+8,$$
$$23=3+20=4+19=5+18=6+17=7+16=8+15=9+14=10+13=11+12,$$
$$37=17+20=18+19.$$
Нескладно переконатися, що жодна пара доданків справді не трапляється на одному боці аркуша.
Щоб знайти наведений розподіл чисел, передусім слід зауважити, що числа 1 і 2 не можуть бути записані на різних сторонах аркуша: інакше одне з них буде з того ж боку, що й число 3, і даватиме з ним у сумі 4 або 5. Далі розподіл відновлюється однозначно. Наприклад, числа 3 і 4 мають бути записані з іншого боку аркуша, ніж 1 і 2, бо $3+1=4$ і $4+1=5$; число 5 буде записане на тому

ж боці, що 1 і 2, тобто на іншому, ніж 3 і 4, — бо $5+4=9$ і т. д.

8. *Задача № 8 групи «А» молодшої ліги.*

Молодша ліга. Сьомі класи

1. ***Відповідь:*** 78.

Розв'язання. На клумбі можуть рости 26 жовтих і 25 білих троянд, бо разом їх $26+25=51>50$. А якби жовтих троянд росло 25 або менше, то білих було б іще менше, тож разом їх мали би щонайбільше $25+24=49<50$. Значить, жовтих троянд 26 або більше, а рожевих — $3\cdot 26=78$ чи більше.

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. ***Розв'язання.*** Оскільки для довільної точки E всередині квадрата кути BCE та CBE гострі, кут $150°$ розташований при вершині E трикутника BCE (рис. 6). Аналогічно кут $150°$ розташований при вершині F трикутника CDF.

Запишемо рівності $\angle ECB=\angle FCD=(180°-150°)/2=15°$, звідки

$$\angle ECF=\angle BCD-\angle ECB-\angle FCD=90°-2\cdot 15°=60°.$$

Крім того, з міркувань симетрії відрізки CE й CF рівні. Разом із рівністю $\angle ECF=60°$ це означає, що трикутник CEF правильний, бо $\angle CEF=\angle CFE=(180°-\angle ECF)/2=60°$.

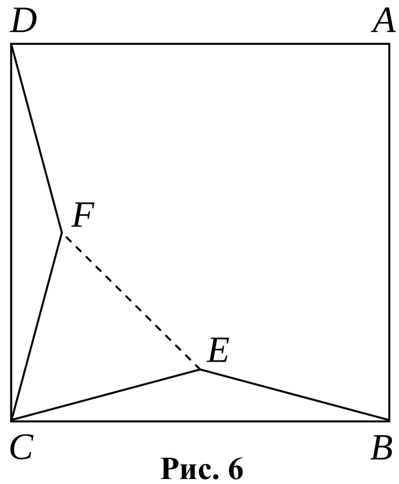

Рис. 6

4. *Задача № 4 групи «Б» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «Б» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «Б» молодшої ліги.*

8. ***Розв'язання.*** Маємо залишити $20-12=8$ тур. Якщо на кожній із восьми горизонталей дошки є хоча б по одній турі, залишімо на дошці відповідні вісім тур. Вони триматимуть під ударом поля кожної з восьми горизонталей, тобто всі 64 поля дошки. Якщо ж на декотрій горизонталі тур немає, то, щоб тримати під ударом поля цієї горизонталі, тури мають розташовуватися на всіх восьми вертикалях дошки. У цьому разі можна залишити по одній турі з кожної вертикалі.

Середня ліга. Група «А»

1. ***Розв'язання.*** Проведемо заміну змінних: нехай $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ і $z=a+b-c$. Тоді $a=\dfrac{y+z}{2}$, $b=\dfrac{z+x}{2}$, $c=\dfrac{x+y}{2}$. Зауважимо, що відповідно до нерівності трикутника всі три числа x, y і z додатні. Вираз з умови задачі через ці змінні можна переписати так:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{4b}{c+a-b}+\frac{9c}{a+b-c}=\frac{y+z}{2x}+\frac{4(z+x)}{2y}+\frac{9(x+y)}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{4z+4x}{y}+\frac{9x+9y}{z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)\geqslant\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}+\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{9x}{z}}+\sqrt{\frac{4z}{y}\cdot\frac{9y}{z}}=2+3+6=11.$$

2. ***Відповідь:*** $a_{2012}=\dfrac{12\,071}{12\,073}$.

Розв'язання. Доведемо з допомогою методу математичної індукції, що $a_n=\dfrac{6n-1}{6n+1}$ і $3a_n-4\neq 0$, $n\geqslant 0$. Для $n=0$ обидва твердження, очевидно, справджуються. Якщо $a_n=\dfrac{6n-1}{6n+1}$ і $3a_n-4\neq 0$, то

$$a_{n+1}=\frac{2a_n-3}{3a_n-4}=\frac{2\cdot\frac{6n-1}{6n+1}-3}{3\cdot\frac{6n-1}{6n+1}-4}=\frac{2(6n-1)-3(6n+1)}{3(6n-1)-4(6n+1)}=\frac{12n-2-18n-3}{18n-3-24n-4}=\frac{-6n-5}{-6n-7}=\frac{6n+5}{6n+7}=\frac{6(n+1)-1}{6(n+1)+1}.$$

Разом із тим $a_{n+1}=\frac{6(n+1)-1}{6(n+1)+1}<1$, тому $a_{n+1}\neq\frac{4}{3}$ і $3a_{n+1}-4\neq 0$. Індукційний перехід проведено.

Таким чином, $a_{2012}=\frac{6\cdot 2012-1}{6\cdot 2012+1}=\frac{12\,071}{12\,073}$.

3. ***<u>Розв'язання</u>*.** Покажемо, що точка, через яку проходять усі кола, — ортоцентр ΔABC, який позначимо через *H*. Хай також *G* — точка перетину медіан трикутника, M_C — середина сторони *AB*, а S_C — точка, симетрична до вершини *C* відносно M_C (рис. 7). Припустімо спершу, що точка *X* не лежить на відрізку CM_C. Тоді $C_1CC_2S_C$ — чотирикутник, діагоналі якого точкою перетину M_C діляться навпіл, тобто паралелограм. Маємо $CC_1\parallel C_2S_C$. Крім того, точка *X* лежить усередині відрізка CC_1, а точка *G* — всередині відрізка CM_C. Тому промінь *XG* перетинає пряму C_2S_C у деякій точці *Y* і з подібності за трьома кутами трикутників *XGC* та YGS_C

$$\frac{GY}{GX}=\frac{GS_C}{GC}=\frac{GM_C+M_CS_C}{GC}=\frac{\frac{1}{3}CM_C+CM_C}{\frac{2}{3}CM_C}=2.$$

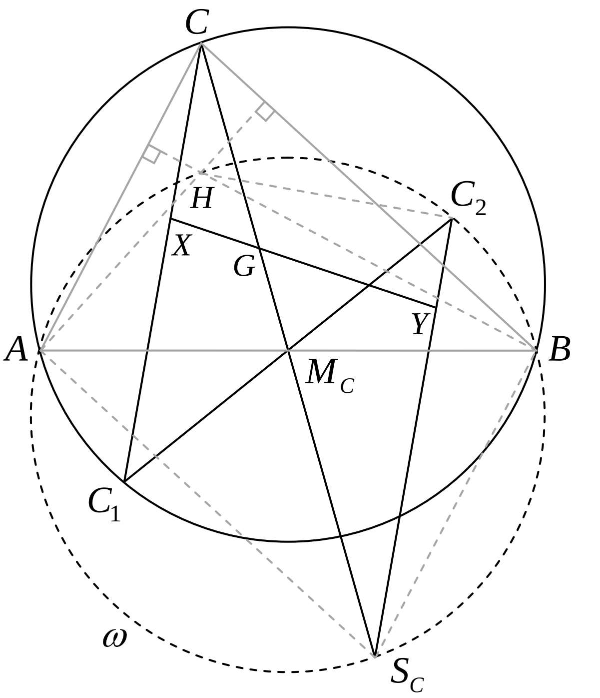

Рис. 7

Таким чином, точка *Y*, що визначається рівністю $\overrightarrow{GY}=2\overrightarrow{XG}$, належить прямій C_2S_C. Із тих самих міркувань, проведених для вершин *A* та *B*, випливає, що визначена цією рівністю точка *Y* лежить також на прямих A_2S_A і B_2S_B, де точки S_A та S_B побудовані аналогічно до S_C. Зауважимо, що твердження не порушується і тоді, коли точка *X* лежить на медіані: якщо *X* лежить на CM_C, то, враховуючи, що на цій же прямій лежать S_C і *G*, на ній же містяться і C_1, C_2 та *Y*, тому *Y* і в цьому випадку лежить на прямій C_2S_C.

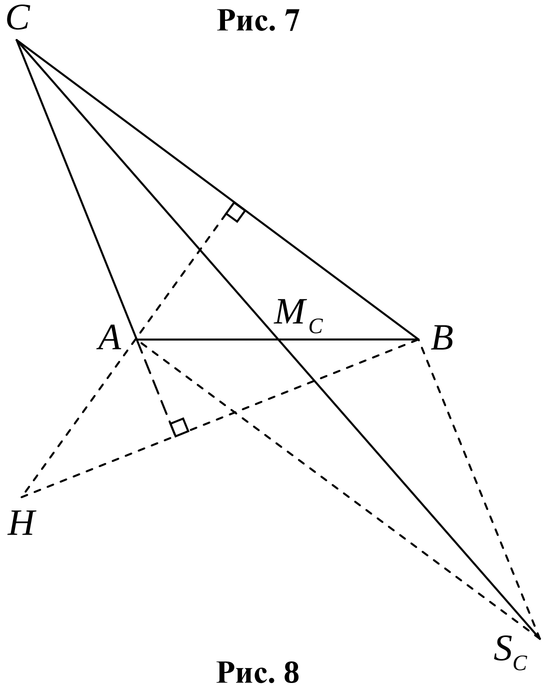

Рис. 8

Розгляньмо тепер коло ω, симетричне відносно точки M_C до описаного кола ΔABC. При такій симетрії точки *A* та *B* переходять одна в одну, а точки *C* і C_1 переходять відповідно у S_C і C_2, тож точки *A*, *B*, S_C і C_2 лежать на ω. Покажемо, що на цьому ж колі лежить і ортоцентр *H*, причому HS_C — діаметр кола ω.

Якщо кути *A* та *B* трикутника *ABC* гострі (рис. 7), то *H* лежить із того ж боку від прямої *AB*, що й точка *C*, $\angle HAB=90^\circ-\angle ABC$, а $\angle HBA=90^\circ-\angle BAC$. Тому

$$\angle AHB=180^\circ-\angle HAB-\angle HBA=\angle ABC+\angle BAC=180^\circ-\angle ACB=180^\circ-\angle BS_CA,$$

тобто *H* лежить на ω. Крім того,

$$\angle HBS_C=\angle ABS_C+\angle HBA=\angle BAC+(90^\circ-\angle BAC)=90^\circ,$$

тобто HS_C — діаметр кола.

Якщо один із кутів *A* та *B*, приміром кут *A*, тупий (рис. 8), то *H* лежить з іншого боку від *AB*, ніж точка *C*, а $\angle CBH=90^\circ-\angle ACB$. Тому

$$\angle AHB = 90° - \angle CBH = \angle ACB = \angle BS_C A,$$

тобто H і в цьому разі лежить на ω. Крім того,

$$\angle HBS_C = \angle ABS_C - \angle HBA = \angle BAC - (\angle CBH - \angle ABC) = \angle BAC - (90° - \angle ACB - \angle ABC) = 90°,$$

тобто HS_C — діаметр кола.

Якщо ж один із кутів *A* чи *B*, приміром кут *A*, прямий, то $H = A$, отже і в цьому випадку *H* лежить на колі ω. До того ж $\angle HBS_C = \angle ABS_C = \angle BAC = 90°$, тому HS_C — діаметр кола.

Якби точки *H* та *Y* збігалися, це означало б, що водночас $H = Y \in C_2S_C$ і $H \in \omega$. Але пряма C_2S_C перетинає коло ω тільки у точках C_2 і S_C, причому $Y \neq S_C$ з огляду на розташування точок *X* і *G*. Тому $H = Y = C_2$. Аналогічно $H = Y = A_2 = B_2 = C_2$, що суперечить тому, що A_2, B_2 і C_2 — три різні точки. Таким чином, $H \neq Y$.

Тепер доведемо, що точка C_2 лежить на колі з діаметром *HY*. Якщо $C_2 = H$ або $C_2 = Y$, це твердження, очевидно, виконується. Інакше $\angle HC_2S_C = 90°$ (бо HS_C — діаметр) і залежно від розташування точки *Y* або $\angle HC_2Y = \angle HC_2S_C = 90°$, або $\angle HC_2Y = 180° - \angle HC_2S_C = 90°$. У будь-якому разі $\angle HC_2Y = 90°$, звідки й випливає потрібне твердження.

З аналогічних міркувань для інших вершин матимемо, що всі три точки A_2, B_2 і C_2 лежать на колі з діаметром *HY*. Отже, коло, описане навколо трикутника $A_2B_2C_2$, має діаметр *HY* і незалежно від вибору точки *X* проходить через *H* — ортоцентр трикутника *ABC*.

4. *Відповідь:* 3.

Розв'язання. Позначмо сторони трикутника через $a = BC$, $b = AC$, $c = AB = AD + BD = 4$. За властивістю бісектриси $\frac{a}{b} = \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} = 3$. І навпаки: якщо $\frac{a}{b} = 3$, а $c = 4$, то бісектриса, проведена до сторони *c*, ділить її на відрізки $AD = 1$ і $BD = 3$. Отже, умову задовольняють трикутники зі сторонами $a = 3b$, *b*, $c = 4$ і лише вони. Порахуємо площу трикутника з цими довжинами сторін за формулою Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*p* — півпериметр трикутника). Маємо:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b+b+4}{2} = 2b+2,$$

$$S = \sqrt{(2b+2)(2b+2-3b)(2b+2-b)(2b+2-4)} = 2\sqrt{(b+1)(2-b)(b+2)(b-1)} = 2\sqrt{(b^2-1)(4-b^2)}.$$

Підкореневий вираз дорівнює

$$(b^2-1)(4-b^2) = -b^4 + 5b^2 - 4 = -\left(b^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leqslant \frac{9}{4}.$$

Тому площа трикутника не перевищує $2\sqrt{\frac{9}{4}} = 3$ і дорівнює цьому числу, коли $b^2 - \frac{5}{2} = 0$, тобто при $b = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Залишається перевірити, що трикутник зі сторонами $a = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{5}{2}}$ і $c = 4$ існує. Це випливає з того, що сума двох менших чисел $\sqrt{\frac{5}{2}} + 4$ більша за третє число $3\sqrt{\frac{5}{2}}$, бо $4 > 2\sqrt{\frac{5}{2}}$ — у цьому можна переконатися, піднісши обидві частини до квадрата.

5. *Відповідь:* не можуть.

Розв'язання. Припустимо, для деяких натуральних чисел *n*, *x* та *y* мають місце рівності $a_n = x^2$ і $a_{n+1} = y^2$. Оскільки $a_{n+1} - a_n = 2\tau(n)$ — число додатне, то $y > x$. А оскільки ця різниця ділиться на 2, то *y* та *x* повинні мати однакову парність, тобто $y \geqslant x + 2$. Тоді

$$2\tau(n) = a_{n+1} - a_n = y^2 - x^2 \geqslant (x+2)^2 - x^2 = 4x + 4 \Rightarrow \tau(n) \geqslant 2x + 2.$$

Відзначимо, що кількість натуральних дільників числа *n* не перевищує $2\sqrt{n}$, бо всі такі дільники можна розбити на пари $\left(d, \frac{n}{d}\right)$, у кожній з яких один із дільників не більший за $\sqrt{n}$ (при цьому число $\sqrt{n}$, якщо воно ціле, ми рахуємо навіть двічі). Тож маємо

$$2x+2 \leqslant \tau(n) \leqslant 2\sqrt{n} \;\Rightarrow\; \sqrt{a_n} = x < \sqrt{n} \;\Rightarrow\; a_n < n.$$

Але $a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > ... > a_2 > a_1 \geqslant 1$, тому $a_n \geqslant n$. Дістали суперечність.

6. ***<u>Відповідь</u>:*** $n = 1$.

<u>Розв'язання</u>. Оскільки $2^4 \equiv 1 \,(\text{mod}\, 5)$ і $3^4 \equiv 1 \,(\text{mod}\, 5)$, то залишки від ділення на 5 чисел $2^n + 1$ і $3^n + 2$ повторюються з періодом 4 і залежать лише від остачі, яку число *n* дає при діленні на 4:

— якщо $n \equiv 1 \,(\text{mod}\, 4)$, то $2^n + 1 \equiv 3 \,(\text{mod}\, 5)$ і $3^n + 2 \equiv 0 \,(\text{mod}\, 5)$;

— якщо $n \equiv 2 \,(\text{mod}\, 4)$, то $2^n + 1 \equiv 0 \,(\text{mod}\, 5)$ і $3^n + 2 \equiv 1 \,(\text{mod}\, 5)$;

— якщо $n \equiv 3 \,(\text{mod}\, 4)$, то $2^n + 1 \equiv 4 \,(\text{mod}\, 5)$ і $3^n + 2 \equiv 4 \,(\text{mod}\, 5)$;

— якщо $n \equiv 0 \,(\text{mod}\, 4)$, то $2^n + 1 \equiv 2 \,(\text{mod}\, 5)$ і $3^n + 2 \equiv 3 \,(\text{mod}\, 5)$.

Як видно, незалежно від значення *n* обидва числа $2^n + 1$ і $3^n + 2$ не можуть водночас поділитися на 5. Тому з подільності добутку $(2^n + 1)(3^n + 2)$ на 5^n випливає, що або число $2^n + 1$, або число $3^n + 2$ кратне 5^n. При $n \geqslant 2$ маємо $5^n = (3+2)^n > 3^n + 2^n > 3^n + 2 > 2^n + 1$, тож подільність можлива лише за умови $n = 1$. Якщо ж $n = 1$, то число $(2^n + 1)(3^n + 2) = 15$ справді ділиться на $5^n = 5$.

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. ***<u>Розв'язання</u>.*** Нехай у Сашиній лабораторії живуть *n* хамелеонів. Побудуймо дводольний граф на 2*n* вершин A_1, A_2, …, A_n (ліва частина графа) і B_1, B_2, …, B_n (права частина графа): вершини A_i та B_j сполучені ребром тоді й лише тоді, коли $i \neq j$, а *i*-й та *j*-й хамелеони з'єднані дротом; жодна пара вершин A_i, A_j, а також жодні дві вершини B_i, B_j між собою не сполучені.

Спочатку пофарбуємо кожну вершину A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, у той же колір, який у перший день мав *i*-й хамелеон. Далі пофарбуємо кожну вершину B_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, у той колір, який мають більшість сполучених із нею вершин. Ясно, що в такий спосіб ми отримаємо у правій частині графа забарвлення хамелеонів на другий день експерименту. Тепер перефарбуємо кожну вершину A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, у колір, який мають більшість сполучених із нею вершин. Унаслідок цього отримаємо в лівій частині графа розфарбування хамелеонів на третій день експерименту. Далі знов перефарбуємо B_i і т. д.

Назвімо різнокольоровими ті ребра графа, які сполучають жовту вершину з синьою або навпаки. Покажемо, що, якщо під час чергового кроку було змінено колір хоча б однієї вершини, то загальна кількість різнокольорових ребер зменшилась. Дійсно, нехай на даному кроці ми фарбуємо ліву частину графа. Розглянемо довільну вершину A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Якщо ми залишаємо її колір незмінним, кількість різнокольорових ребер, які виходять із цієї вершини, також не змінюється. Якщо ж ми змінюємо колір вершини, це означає, що з нею було сполучено більше вершин протилежного кольору, ніж її власного, тобто кількість різнокольорових ребер перевищувала половину всіх ребер, які з неї виходили. При зміні кольору вершини усі різнокольорові ребра, які з неї виходили, перестають бути різнокольоровими — тож після перефарбування матимемо менше різнокольорових ребер, ніж було до того. Таким чином, кількість різнокольорових ребер, які виходять з усіх вершин A_i, тобто загальна кількість різнокольорових ребер у графі, не збільшилась, а якщо хоча б одна вершина змінила свій колір, то зменшилась.

Рано чи пізно кольори вершин побудованого дводольного графа перестануть змінюватися, адже кількість різнокольорових ребер не може зменшуватися необмежено довго. Подивімося після цього на A_d і B_d — дві вершини, що відповідають улюбленому хамелеонові Саші Дискримінанту. Якщо вершини A_d й B_d мають однаковий колір, це означає, що Дискримінант перестав змінювати забарвлення. Якщо ж вершини пофарбовані по-різному, Дискримінант щодня змінює свій колір.

<u>Середня ліга. Група «Б»</u>

1. ***<u>Розв'язання</u>.*** Застосуємо кілька разів нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним двох невід'ємних чисел:

$$x^8+4y^4+5z^2=(x^8+4y^4)+(4z^2+z^2)\geqslant 2\sqrt{4x^8y^4}+2\sqrt{4z^4}=$$
$$=4x^4y^2+4z^2\geqslant 2\sqrt{16x^4y^2z^2}=|8x^2yz|\geqslant 8x^2yz\,.$$

2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*

3. ***<u>Відповідь</u>:*** $\dfrac{2}{9}$.

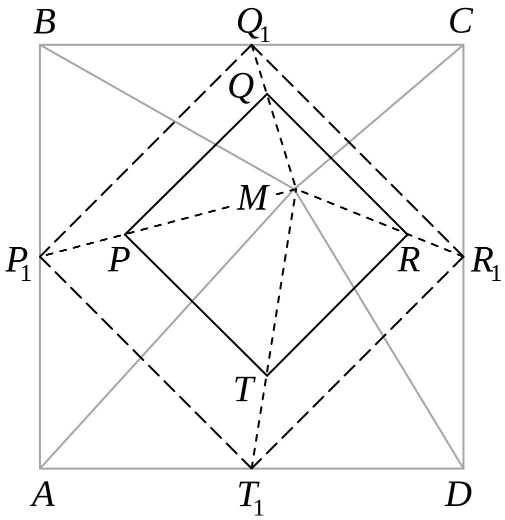

Рис. 9

<u>Розв'язання</u>. Позначимо через P_1, Q_1, R_1 і T_1 середини сторін *AB*, *BC*, *CD* і *DA* квадрата *ABCD* (рис. 9). Трикутники T_1AP_1, P_1BQ_1, Q_1CR_1, R_1DT_1 прямокутні рівнобедрені з катетом $\dfrac{1}{2}$ і кутом $45°$. Тому $T_1P_1=P_1Q_1=Q_1R_1=R_1T_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ і $\angle T_1P_1Q_1=\angle P_1Q_1R_1=\angle Q_1R_1T_1=\angle R_1T_1P_1=90°$. Таким чином, $P_1Q_1R_1T_1$ — квадрат площі $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

Відрізки MP_1, MQ_1, MR_1 і MT_1 — медіани відповідних трикутників. Оскільки точкою перетину медіан трикутника кожна медіана завжди ділиться у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини, то $MP=\dfrac{2}{3}MP_1$, $MQ=\dfrac{2}{3}MQ_1$, $MR=\dfrac{2}{3}MR_1$ і $MT=\dfrac{2}{3}MT_1$. Тепер можна скористатися поняттям гомотетії і сказати, що *PQRT* — фігура, гомотетична до квадрата $P_1Q_1R_1T_1$ із центром гомотетії *M* і коефіцієнтом $\dfrac{2}{3}$, звідки $S_{PQRT}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot S_{P_1Q_1R_1T_1}=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{9}$.

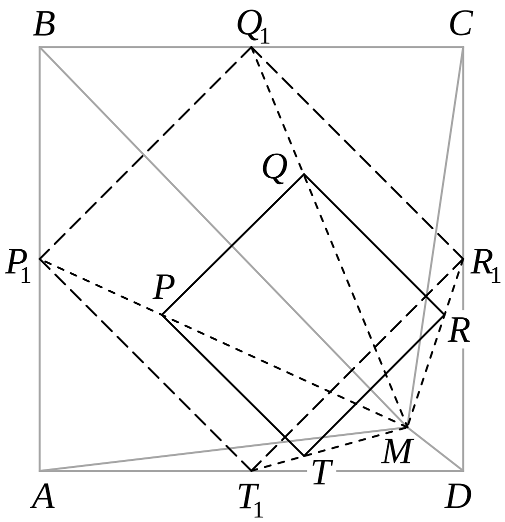

Рис. 10

Натомість можна обійтися міркуваннями подібності трикутників: трикутники *TMP*, *PMQ*, *QMR* і *RMT* подібні до трикутників T_1MP_1, P_1MQ_1, Q_1MR_1, R_1MT_1 із коефіцієнтом $\dfrac{2}{3}$. Тож якщо точка *M* лежить усередині квадрата $P_1Q_1R_1T_1$ (рис. 9), то

$$S_{PQRT}=S_{TMP}+S_{PMQ}+S_{QMR}+S_{RMT}=\left(\frac{2}{3}\right)^2(S_{T_1MP_1}+S_{P_1MQ_1}+S_{Q_1MR_1}+S_{R_1MT_1})=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot S_{P_1Q_1R_1T_1}=\frac{2}{9}.$$

Якщо точка *M* лежить поза квадратом $P_1Q_1R_1T_1$, наприклад у трикутнику R_1DT_1 (рис. 10), то

$$S_{PQRT}=S_{TMP}+S_{PMQ}+S_{QMR}-S_{RMT}=\left(\frac{2}{3}\right)^2(S_{T_1MP_1}+S_{P_1MQ_1}+S_{Q_1MR_1}-S_{R_1MT_1})=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot S_{P_1Q_1R_1T_1}=\frac{2}{9}.$$

Нарешті, якщо точка *M* лежить на межі квадрата $P_1Q_1R_1T_1$, наприклад на відрізку R_1T_1, то знову

$$S_{PQRT}=S_{TMP}+S_{PMQ}+S_{QMR}=\left(\frac{2}{3}\right)^2(S_{T_1MP_1}+S_{P_1MQ_1}+S_{Q_1MR_1})=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot S_{P_1Q_1R_1T_1}=\frac{2}{9}.$$

4. *Задача № 4 групи «А» середньої ліги.*

5. ***<u>Розв'язання</u>.*** Якщо $N = 1+2+...+n$, то за добре відомою формулою $N = \frac{n(n+1)}{2}$. А тоді $8N+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$. Навпаки: якщо $8N+1$ — квадрат цілого невід'ємного числа, то це число непарне і є не меншим за $\sqrt{8\cdot 1+1} = 3$. Тому $8N+1 = (2n+1)^2$ для деякого $n \geqslant 1$. Тоді $N = \frac{(2n+1)^2-1}{8} = \frac{4n^2+4n}{8} = \frac{n(n+1)}{2} = 1+2+...+n$.

6. *Задача № 6 групи «А» середньої ліги.*

7. ***<u>Розв'язання</u>.*** Другому гравцю слід подумки розділити прямокутник на дві половини 1×6. Коли перший гравець ставить цифру m на k-ту позицію однієї з половин, другий гравець відповідає, ставлячи цифру $9-m$ на k-ту позицію іншої половини прямокутника. Оскільки після кожної пари ходів довільна позиція k, $1 \leqslant k \leqslant 6$, буде або вільною, або зайнятою водночас в обох половинах, другий гравець завжди зможе зробити хід відповідно до такої стратегії. Так він доб'ється того, що після 12 ходів сума чисел a та b, записаних відповідно у першій і в другій половині прямокутника, складатиме 999 999 (щоб переконатися в цьому, можна уявити, що числа додають у стовпчик). А число-результат дорівнюватиме $a\cdot 10^6 + b = 999\,999a + (a+b)$ і тому буде ділитися на 999 999. Лишається зауважити, що число 999 999 кратне 77, бо $999\,999 = 999\cdot 1001 = 999\cdot 13\cdot 77$.

8. *Задача № 8 групи «А» середньої ліги.*

<u>Старша ліга. Група «А»</u>

1. ***<u>Розв'язання</u>.*** Із нерівності $xyz > 0$ випливає, що або всі три числа x, y і z додатні, або додатним є одне з них, а інші два числа від'ємні. У першому випадку з монотонності многочлена P маємо $P(x) > P(0) = 0$, $P(y) > P(0) = 0$ і $P(z) > P(0) = 0$, тож сума $P(x)+P(y)+P(z)$ явно додатна.

Нехай тепер x та y від'ємні, а z — додатне. З використанням умови $x+y+z>0$ маємо, що $z > -x-y > 0$. Тому $P(z) > P(-x-y)$. Отже, якщо для довільних від'ємних x, y довести нерівність $P(x)+P(y)+P(-x-y) > 0$, то задачу буде розв'язано. Щоб спростити подальші викладки, розглядатимемо еквівалентне твердження: для довільних додатних x та y ми будемо доводити нерівність $P(x+y)+P(-x)+P(-y) > 0$.

Нехай $Q(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$. Тоді $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2$. За умовою $P(x)$ зростає на $[0,+\infty)$, тому $P'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx \geqslant 0$ при $x>0$ $\Leftrightarrow$ $4ax^2+3bx+2c \geqslant 0$ при $x>0$. З останньої нерівності випливає, що $a>0$, бо інакше нерівність не справджується для достатньо великих значень x. До того ж $c \geqslant 0$, бо інакше нерівність не справджується для значень x, досить близьких до нуля.

Розпишімо тепер суму $P(x+y)+P(-x)+P(-y)$:

$$P(x+y)+P(-x)+P(-y) = a((x+y)^4+x^4+y^4)+b((x+y)^3-x^3-y^3)+c((x+y)^2+x^2+y^2) =$$
$$= a(2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4)+b(3x^2y+3xy^2)+c(2x^2+2xy+2y^2).$$

Враховуючи, що x, y та a додатні, а c невід'ємне, в останньому виразі з першим і третім доданками проблем не виникає: перший завжди додатний, а третій невід'ємний. Труднощі створює другий доданок. Утім, можна помітити, що такий же доданок з'явиться і в нерівності $4ax^2+3bx+2c \geqslant 0$, якщо, наприклад, замість x підставити в неї суму $x+y$, а потім домножити обидві частини на xy:

$$xy(4a(x+y)^2+3b(x+y)+2c) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; xy(a(4x^2+8xy+4y^2)+b(3x+3y)+c\cdot 2) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; a(4x^3y+8x^2y^2+4xy^3)+b(3x^2y+3xy^2)+c\cdot 2xy \geqslant 0.$$

Віднявши один вираз від іншого, матимемо

$$a(2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4)+b(3x^2y+3xy^2)+c(2x^2+2xy+2y^2)-$$
$$-(a(4x^3y+8x^2y^2+4xy^3)+b(3x^2y+3xy^2)+c\cdot 2xy) =$$
$$= a(2x^4-2x^2y^2+2y^4)+c(2x^2+2y^2) = 2a((x^2-y^2)^2+x^2y^2)+2c(x^2+y^2) > 0.$$

Таким чином, число $P(x+y)+P(-x)+P(-y)$ дорівнює сумі додатного виразу й невід'ємного, тому це число є додатним.

2. ***<u>Відповідь:</u>*** $f(x)=x$.

<u>Розв'язання.</u> Запишемо ще раз рівність з умови задачі:

$$f(x^2+y^2+2012xy)=x^2+y^2+2012f(x)f(y).$$

Покладімо спершу $x=y=0$, одержимо $f(0)=2012f^2(0)$. Якщо значення $f(0)$ не дорівнює нулю, можемо поділити обидві частини на $2012f(0)$, звідки дістанемо $f(0)=\dfrac{1}{2012}$. Але в цьому випадку, підставивши в початкову рівність $x=1$, $y=0$, матимемо, що $f(1)=1+f(1)$, чого бути не може. Значить, $f(0)=0$.

Підставимо тепер у задану рівність $y=0$, звідки, з урахуванням $f(0)=0$, дістанемо $f(x^2)=x^2$. Оскільки x^2 може набувати довільного невід'ємного значення, робимо висновок, що $f(x)=x$ для всіх невід'ємних *x*.

Нехай *y* — деяке від'ємне число. Візьмімо таке додатне *x*, для якого $x^2+y^2+2012xy>0$. Вираз $x^2+y^2+2012xy$ можна розглядати як квадратичну функцію відносно *x* із додатним старшим коефіцієнтом, тому потрібне значення *x* існує. Тоді

$$x^2+y^2+2012xy=f(x^2+y^2+2012xy)=x^2+y^2+2012f(x)f(y) \Rightarrow xy=f(x)f(y).$$

А оскільки $f(x)=x>0$, отримуємо, що $f(y)=y$. Отже, $f(x)=x$ також і для від'ємних значень аргументу.

Насамкінець слід пересвідчитись, що функція $f(x)=x$ справді задовольняє умову задачі.

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. ***<u>Відповідь:</u>*** ГМТ — вписане у ΔABC коло.

<u>Розв'язання.</u> Уведімо позначення, як на рис. 11: нехай *O* — центр трикутника, M_a, M_b та M_c — середини відповідних сторін, H_a, H_b та H_c — основи перпендикулярів, опущених із точки *X* на відповідні сторони, і, нарешті, P_a, P_b та P_c — основи перпендикулярів, опущених із точки *X* на відрізки AM_a, BM_b та CM_c. Покладімо, що радіус уписаного кола трикутника *ABC* одиничний, тобто $OM_a=OM_b=OM_c=1$.

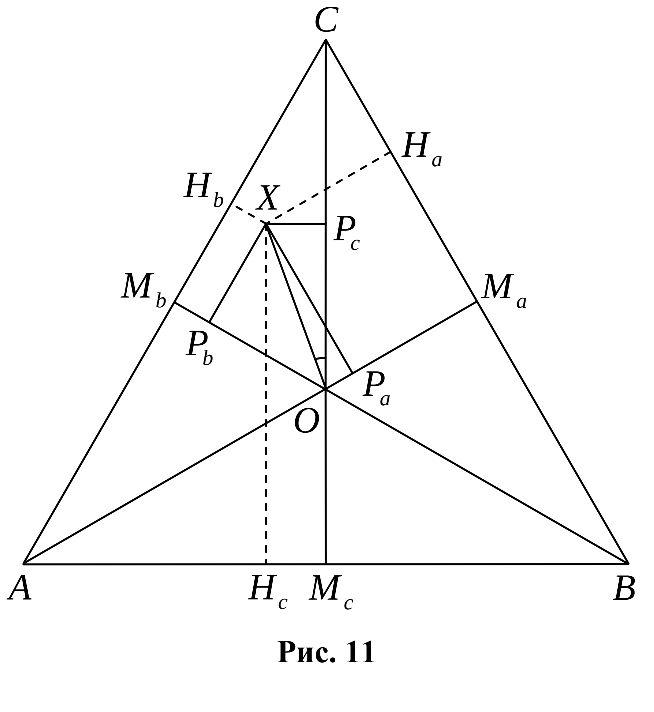

Рис. 11

Усі шість трикутників AOM_b, COM_b, COM_a, BOM_a, BOM_c та AOM_c симетричні, тож можемо вважати, що точка *X* лежить, наприклад, усередині трикутника COM_b або на його межі. При цьому, очевидно, точка $X=O$ умову не задовольняє. Уведемо позначення $XO=a$, $a>0$. Нехай також $\angle XOC=\alpha$, $0°\leqslant\alpha\leqslant 60°$. Якщо $\alpha\leqslant 30°$ (як на рис. 11), маємо:

$$h_{AB}=XH_c=P_cM_c=OM_c+OP_c=1+XO\cdot\cos\angle XOP_c=1+a\cos\alpha,$$

$$h_{CA}=XH_b=P_bM_b=OM_b-OP_b=1-XO\cdot\cos\angle XOP_b=1-a\cos(60°-\alpha),$$

$$h_{BC}=XH_a=P_aM_a=OM_a-OP_a=1-XO\cdot\cos\angle XOP_a=1-a\cos(60°+\alpha).$$

Якщо ж $\alpha>30°$, точка P_a лежить по інший бік від *O*, ніж M_a. Але й у цьому випадку

$$h_{BC}=XH_a=P_aM_a=OM_a+OP_a=1+XO\cdot\cos\angle XOP_a=1+a\cos(180°-(60°+\alpha))=1-a\cos(60°+\alpha).$$

Відзначимо, що всі три рівності щодо відстаней від точки *X* до сторін трикутника справджуються і в тому випадку, якщо один із прямокутних трикутників вироджений, тобто коли $\alpha\in\{0°, 30°, 60°\}$.

Ясно, що $1+a\cos\alpha>1>1-a\cos(60°-\alpha)$. Крім того, $1+a\cos\alpha\geqslant 1-a\cos(60°+\alpha)$, бо

$$(1+a\cos\alpha)-(1-a\cos(60^\circ+\alpha))=a(\cos\alpha+\cos(60^\circ+\alpha))=2a\cos(30^\circ+\alpha)\cos 30^\circ\geqslant 0.$$

Отже, h_{AB} є найбільшою з трьох відстаней. Нам треба перевірити, за яких умов справджується співвідношення $\sqrt{h_{AB}}+\sqrt{h_{BC}}+\sqrt{h_{CA}}=2\sqrt{h_{AB}} \iff \sqrt{h_{BC}}+\sqrt{h_{CA}}=\sqrt{h_{AB}}$. Покажемо, що це відбувається тоді й лише тоді, коли $a=1$, тобто коли *X* лежить на вписаному колі трикутника *ABC*.

Якщо $a=1$, то

$$\sqrt{h_{AB}}=\sqrt{1+\cos\alpha}=\sqrt{1+\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\sqrt{h_{BC}}=\sqrt{1-\cos(60^\circ+\alpha)}=\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\frac{60^\circ+\alpha}{2}\right)}=\sqrt{2}\sin\frac{60^\circ+\alpha}{2},$$

$$\sqrt{h_{CA}}=\sqrt{1-\cos(60^\circ-\alpha)}=\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\frac{60^\circ-\alpha}{2}\right)}=\sqrt{2}\sin\frac{60^\circ-\alpha}{2},$$

$$\sqrt{h_{BC}}+\sqrt{h_{CA}}=\sqrt{2}\left(\sin\frac{60^\circ+\alpha}{2}+\sin\frac{60^\circ-\alpha}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot 2\sin 30^\circ\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{h_{AB}}.$$

Таким чином, ми довели, що $\sqrt{1-\cos(60^\circ+\alpha)}+\sqrt{1-\cos(60^\circ-\alpha)}=\sqrt{1+\cos\alpha}$. Домноживши обидві частини рівності на $\sqrt{a}$ для довільного додатного *a*, матимемо

$$\sqrt{a-a\cos(60^\circ+\alpha)}+\sqrt{a-a\cos(60^\circ-\alpha)}=\sqrt{a+a\cos\alpha} \iff$$

$$\iff \sqrt{(1-a\cos(60^\circ+\alpha))+(a-1)}+\sqrt{(1-a\cos(60^\circ-\alpha))+(a-1)}=\sqrt{(1+a\cos\alpha)+(a-1)}.$$

Тоді те, що $\sqrt{1-a\cos(60^\circ+\alpha)}+\sqrt{1-a\cos(60^\circ-\alpha)}\neq\sqrt{1+a\cos\alpha}$ при $a\neq 1$, випливає з такої леми:

<u>Лема</u>. Якщо $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{z}$ для деяких невід'ємних чисел *x*, *y*, *z*, то $\sqrt{x+d}+\sqrt{y+d}\neq\sqrt{z+d}$ для всіх $d\neq 0$ (і для від'ємних зокрема, але за природної умови, що числа $x+d$, $y+d$ і $z+d$ невід'ємні).

<u>Доведення</u>. Припустимо, що водночас $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{z}$ і $\sqrt{x+d}+\sqrt{y+d}=\sqrt{z+d}$ для деякого $d\neq 0$. Без утрати загальності можемо вважати, що $d>0$, бо інакше можна розглянути числа $x'=x+d$, $y'=y+d$, $z'=z+d$ і $d'=-d>0$, які також задовольняють дві відповідні рівності. Розглянувши різницю рівностей, матимемо

$$(\sqrt{x+d}-\sqrt{x})+(\sqrt{y+d}-\sqrt{y})=\sqrt{z+d}-\sqrt{z} \iff f(x)+f(y)=f(z),$$

де $f(x)=\sqrt{x+d}-\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$. Похідна такої функції дорівнює $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+d}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}<0$, $x>0$.

Це значить, що $f(x)$ спадає на $[0,+\infty)$. Очевидно, що $x+d>0$ та $y+d>0$, тому (зважаючи на рівність $\sqrt{x+d}+\sqrt{y+d}=\sqrt{z+d}$) $x+d<z+d$ та $y+d<z+d$. Тобто $x<z$ та $y<z$, звідки $f(x)>f(z)$ і $f(y)>f(z) \Rightarrow f(x)+f(y)>2f(z)>f(z)$, бо $f(z)>0$. А це безпосередньо суперечить виписаній вище рівності. Лему доведено.

Залишається підставити у твердження леми відповідні числа: $x=(1-a\cos(60^\circ+\alpha))+(a-1)$, $y=(1-a\cos(60^\circ-\alpha))+(a-1)$, $z=(1+a\cos\alpha)+(a-1)$, $d=-(a-1)$.

5. *Задача № 5 групи «А» середньої ліги.*

6. *<u>Розв'язання</u>*. Нехай $x^2+xy+6y^2=23z+5$ для деяких цілих *x*, *y*, *z*. Тоді

$$x^2+xy+6y^2\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 23) \Rightarrow 4(x^2+xy+6y^2)\equiv 20\ (\mathrm{mod}\ 23) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+4xy+y^2+23y^2\equiv 20\ (\mathrm{mod}\ 23) \Rightarrow (2x+y)^2\equiv 20\ (\mathrm{mod}\ 23).$$

Але квадрат жодного цілого числа не дає остачі 20 у разі ділення на 23. Щоб у цьому переконатися, випишемо остачі квадратів чисел від 0 до 11 (усе за модулем 23): $0^2\equiv 0$, $1^2\equiv 1$, $2^2\equiv 4$, $3^2\equiv 9$, $4^2\equiv 16$, $5^2=25\equiv 2$, $6^2=36\equiv 13$, $7^2=49\equiv 3$, $8^2=64\equiv 18$, $9^2=81\equiv 12$, $10^2=100\equiv 8$, $11^2=121\equiv 6$. Якщо ж число дає від ділення на 23 остачу $r\geqslant 12$, то $r^2=(-r)^2\equiv(23-r)^2$, а $23-r\leqslant 11$, тобто квадрат і такого числа дає одну з уже розглянутих остач, серед яких остачі 20 немає.

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. ***Розв'язання.*** Зведемо задачу до такої: пофарбувати кожне ціле невід'ємне число у жовтий або в синій колір, щоб не знайшлося жодної трійки послідовних чисел $n,\ n+1,\ n+2$, забарвлених однаково, та не існувало нескінченної арифметичної прогресії із цілим невід'ємним першим членом a_1 і натуральною різницею d, усі члени якої пофарбовані в один колір.
Знайшовши таке вихідне розфарбування, можна отримати розфарбування, що задовольняє умову задачі: кожне натуральне число $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, де $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k$ — різні прості числа, пофарбуємо у колір, яким раніше фарбували число $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ (а число 1 — у колір, який мало число 0). Тоді трійки чисел $p^n,\ p^{n+1},\ p^{n+2}$ будуть забарвлені так, як у вихідному розфарбуванні були забарвлені трійки $n,\ n+1,\ n+2$. А геометричні прогресії — так, як у вихідному розфарбуванні арифметичні прогресії: якщо $b_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ і $q = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_l^{\beta_l}$, де $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k$ — різні прості числа і $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_l$ — різні прості числа, то $a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ і $d = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_l$.
Тепер власне побудуємо вихідне розфарбування. Для цього розіб'ємо всі цілі невід'ємні числа на групи, що складаються з двох, чотирьох, восьми, шістнадцяти і т. д. чисел: до першої групи включимо два числа 0 та 1, до другої групи — чотири числа 2, 3, 4 і 5, до третьої групи — вісім чисел 6, 7, …, 13, до четвертої — числа 14, 15, …, 29 і т. д.; в i-й групі будуть числа $2^i - 2,\ 2^i - 1,\ \ldots,\ 2^{i+1} - 3$. Числа в межах кожної групи пофарбуємо через одне, тобто так, щоб жовті та сині числа чергувалися. Але при цьому у групах із непарним номером, тобто в першій, третій, п'ятій і т. д. групах, перші числа зробимо синіми, а у групах із парним номером, тобто у другій, четвертій, шостій і т. д., перші числа зробимо жовтими:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…
С	Ж	Ж	С	Ж	С	С	Ж	С	Ж	С	Ж	С	Ж	Ж	С	Ж	С	Ж	

Рис. 12

Кожна трійка чисел $n,\ n+1,\ n+2$ або повністю лежить у межах однієї групи, або два числа з трійки належать одній групі, а третє число належить іншій групі. У будь-якому разі у трійці є два послідовних числа, які належать одній і тій самій групі і, отже, забарвлені по-різному.
Візьмімо тепер довільну арифметичну прогресію з першим членом a_1 і різницею d. Виберемо довільну групу чисел, що складається не менш ніж із $2d$ чисел і всі числа якої більші за a_1. З огляду на те, як ми сконструювали розбиття чисел, така група обов'язково знайдеться.
Якщо d непарне, розглянемо довільні два послідовні члени прогресії, які належать вибраній групі чисел: такі знайдуться, бо кількість чисел у групі принаймні вдвічі більша за різницю прогресії. Ці два члени мають різну парність (бо d непарне) і належать одній групі, тому пофарбовані по-різному.
Якщо d парне, розглянемо найбільший член a прогресії, що належить вибраній групі. Наступний за a член $a+d$ належить групі, що йде відразу за вибраною групою, бо вона теж містить більше ніж d чисел. Але a та $a+d$ мають однакову парність, а в сусідніх групах числа однієї парності пофарбовані по-різному. Отже, незалежно від парності числа d арифметична прогресія містить два члени, що мають різні кольори.

Старша ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» старшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. ***Відповідь:*** $\dfrac{4}{5}$.

Розв'язання. Проведемо у трикутнику ABC медіани AM_A та BM_B (рис. 13). Вони перетинаються у точці *O*, яка за умовою є центром вписаного кола трикутника *ABH*. Оскільки центр уписаного кола лежить на перетині бісектрис трикутника, прямі AM_A та BM_B є бісектрисами кутів $\angle BAC$ та $\angle ABH$. Тому $\angle ABM_B = \angle HBM_B = \varphi$, а відрізок AM_A є водночас медіаною та бісектрисою трикутника *ABC*, звідки $AB = AC$. Тоді

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BH}{\frac{1}{2}AC \cdot BH} = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{AB} = \sin\angle ABH = \sin 2\varphi .$$

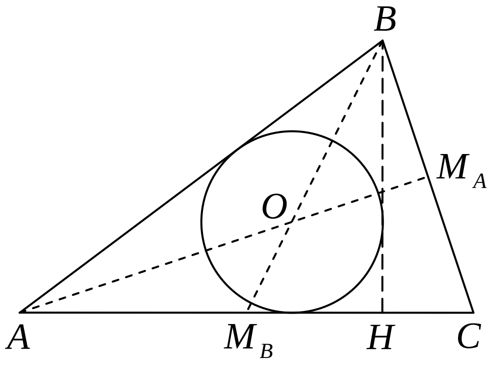

Рис. 13

За властивістю бісектриси $\dfrac{AM_B}{HM_B} = \dfrac{AB}{HB}$, тому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\angle HBM_B = \frac{HM_B}{HB} = \frac{AM_B}{AB} = \frac{AM_B}{AC} = \frac{1}{2}.$$

А далі з відомої тригонометричної формули маємо

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \sin 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Зауважимо також, що трикутник *ABC*, який задовольняє умову задачі, справді існує. Щоб його побудувати, накреслимо прямокутний трикутник *ABH* із катетом $AH = 4$ і гіпотенузою $AB = 5$. Точку *C* відмітимо на промені *AH*, так щоб $AC = 5$. Тоді $AB = AC$, тому медіана AM_A трикутника *ABC*, проведена з вершини *A*, збігається з бісектрисою кута при цій вершині. У той же час якщо BM_B — інша медіана трикутника, то $AM_B = CM_B = \dfrac{5}{2}$, звідки $HM_B = CM_B - CH = \dfrac{3}{2}$. Тому $\dfrac{AM_B}{HM_B} = \dfrac{5}{3} = \dfrac{AB}{HB}$ (бо $HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{25-16} = 3$). Отже, BM_B теж бісектриса трикутника *ABH*, і точка перетину медіан трикутника *ABC* збігається з центром вписаного кола трикутника *ABH*. Крім того, *ABC* гострокутний, тому що висота *BH* за побудовою лежить усередині трикутника і кут $\angle ABC$ гострий, бо $\angle ABC = \angle ACB$.

5. *Задача № 5 групи «Б» середньої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» старшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. ***Розв'язання.*** Якщо зафіксовано дві точки *A* та *B* на відстані *d* одна від одної, то всі такі точки *C*, для яких площа ΔABC дорівнює 1, лежать на двох паралельних прямих, розташованих на віддалі $\dfrac{2}{d}$ від прямої *AB* (рис. 14). Це випливає з того, що площа трикутника дорівнює половині добутку сторони $AB = d$ на проведену до неї висоту, а остання дорівнює відстані від точки *C* до прямої *AB*. Оскільки на кожній із прямих за умовою лежить щонайбільше дві різні позначені точки, трикутників із заданою парою вершин *A* та *B* є щонайбільше $2 \cdot 2 = 4$.

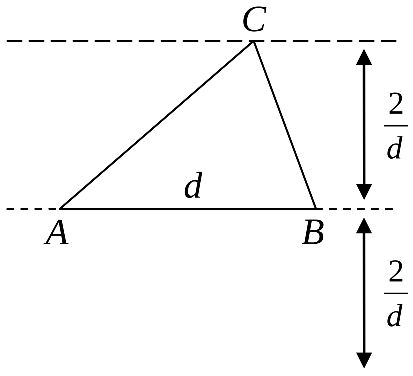

Рис. 14

Тепер візьмемо всі можливі пари позначених точок. Як ми з'ясували, для кожної пари кількість трикутників не перевищує 4, тому в сумі матимемо щонайбільше $4C_n^2$ трикутників. Разом із тим кожен трикутник ми рахували тричі — для кожної пари його вершин по одному разу. Тому справжня кількість трикутників площі 1 не перевищує $\dfrac{4C_n^2}{3} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{2(n^2-n)}{3}$.

Старша ліга. Група «В»

1. *Задача № 1 групи «Б» середньої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» старшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «Б» середньої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «Б» старшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «Б» середньої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «Б» середньої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «Б» старшої ліги.*