Рівняння Пелля

1. Розв'язати рівняння в цілих числах: $7x^2 - y^2 = -1$.

2. Розв'язати рівняння в цілих числах: $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$.

3. Довести, що якщо $m = 2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ — ціле, то m — повний квадрат.

4. Нехай $a, b \in \mathbb{Z}$ такі, що $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2013} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$. Довести, що $3a^2 - 2b^2 = 1$.

5. Чи існують такі раціональні числа a, b, c, d, що
$$(a + b\sqrt{2})^2 + (c + d\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}?$$

6. Нехай $m, n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що а) $(5 + 3\sqrt{2})^m \neq (3 + 5\sqrt{2})^n$; б) $(a + b\sqrt{d})^m \neq (b + a\sqrt{d})^n$, де $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$ і d не є повним квадратом.

7. Доведіть наступні твердження: а) Число $\left[(45 + \sqrt{1975})^{30}\right]$ — непарне;
б) Перші 1000 цифр після коми числа $(6 + \sqrt{35})^{1979}$ — дев'ятки;
в*) $\lim_{n\to\infty}\{(2 + \sqrt{3})^n\} = 1$.

8. Довести, що рівняння $(x+2)^3 - x^3 = y^2$ не має розв'язків в цілих числах.

9. Доведіть, що існує нескінченна кількість трійок послідовних цілих чисел, кожне з яких представляється у вигляді $a^2 + b^2$, де $a, b \in \mathbb{Z}$.

10. Знайти усі трикутники, у яких довжини сторін є послідовними цілими числами, а площа цілим числом

11. Знайти усі натуральні k, m такі, що $k < m$ і
$$1 + 2 + \cdots + k = (k+1) + (k+2) + \cdots + m.$$

12. (*) Доведіть, що існує нескінченна кількість натуральних n таких, що $2n + 1$ і $3n + 1$ — повні квадрати, і що такі n кратні 40.

13. (*) Доведіть, що рівняння $a^2 + b^3 = c^4$ має нескінченну кількість розв'язків в натуральних числах.

14. Доведіть, що якщо для деяких цілих x, n $(x+1)^3 - x^3 = n^2$, то $2n - 1$ — повний квадрат.

15. Відомо, що n — таке ціле число, що $3n + 1, 4n + 1$ — повні квадрати. Довести, що n ділиться на 56.

16. Довести, що якщо $m = 2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ — ціле, то m — повний квадрат.

17. (a, b) такі натуральні числа, що $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2001} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$. Доведіть, що $3a^2 - 2b^2 = 1$.

18. Знайти усі $n \in \mathbb{N}$, що $C_n^{k-1} = 2C_n^k + C_n^{k+1}$ для деякого $k < n$.