Задание 8. Многочлены в комбинаторике.

Задача 1. Дано нечётное число n. Рассмотрим множество $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$ всех натуральных чисел, меньших n, и взаимно простых с n. Обозначим a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ количество непустых подмножеств J множества $\{1, 2, \ldots, k\}$, для которых $\sum_{j\in J} r_j$ имеет остаток i при делении на n. Докажите, что $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$.

Для решения вам могут понадобится круговые многочлены и их свойства. Про них можно прочитать, например, в Кванте, в книге Прасолова «Многочлены».

Задача 2. Пусть k натуральное, p простое. Найти количество p-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, kp\}$, сумма элементов которых кратна p.

Задача 3. Пусть $m, n \geqslant 2$ натуральные числа, $a_1, \ldots, a_n$ целые, ни одно из которых не кратно m^{n-1}. Докажите, что найдутся целые числа $e_1, \ldots, e_n$, не все равные 0, $|e_i| < m$ для всех i, и сумма $e_1a_1 + \ldots + e_na_n$ делится на m^n.

Задача 4. Пусть $p > 5$ простое. Для непустого подмножества $T \subset \{0, 1, \ldots, p-1\}$ определим $E(T)$ как количество последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, для которых $\sum_{i=1}^{p-1} ix_i$ делится на p и все x_i лежат в T. Докажите, что $|E(0,1,3)| \geqslant |E(0,1,2)|$.

Задача 5. Конечную последовательность действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ назовём p-уравновешенной, если числа $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \ldots$ равны для $k = 1, 2, \ldots, p$. Найдите все 50-членные последовательности, которые p-уравновешенны для $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$.

Задача 6. В одной из вершин правильного n-угольника записана еденица, в остальных нули. Хулиган Миша одновременно прибавил к числу в каждой вершине его соседа по часовой стрелке; затем он прибавил к числу в каждой вершине число, стоящее от него через одну вершину по часовой стрелке; затем он прибавил к числу в каждой вершине число, стоящее от него через две вершины по часовой стрелке; и т.д.; наконец, он прибавил к числу в каждой вершине его соседа против часовой стрелки. После этих операций $(n-1)$ из записанных чисел оказались равны. Чему могло быть равно n?

Производящие функции.

Задача 1. Для формальных степенных рядов $F(x), G(x), H(x)$ проверьте, что $FG = GF, (FG)H = F(GH)$.

Задача 2. Докажите по определению, что $(1-t)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} t^n$. Проверьте, что $\binom{-m}{n} = (-1)^n \binom{n+m-1}{m-1}$. Таким образом, можно написать $(1-t)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-m}{n} t^n$.

Задача 3. Фиксируем натуральное k. Пусть $P(n)$ обозначает количество решений уравнения $x_1 + \ldots + x_k = n$ в целых неотрицательных числах, порядок важен. Найти производящую функцию $P(n)$. Найти $P(n)$. Попробуйте доказать эту формулу комбинаторными рассуждениями.

Задача 4. Фиксируем натуральные m, k. Пусть a_n обозначает количество решений уравнения $x_1 + \ldots + x_k = n$, $0 \leqslant x_i \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant k$, порядок важен. Найти производящую функцию для a_n, $n \geqslant 0$. Найти a_n.

Задача 5. Пусть $k_1, \ldots, k_m$ — различные натуральные числа. Обозначим $p(n)$ количество разбиений (порядок не важен) n на слагаемые, каждое из которых равно одному из $k_1, \ldots, k_m$. Найти производящую функцию для $p(n)$.

Задача 6. Пусть $F_0 = 0, F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geqslant 0$ последовательность Фибоначчи. Составить уравнение для $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$, найти $F(x)$. Найти отсюда F_n.

Задача 7.(Счастливые билеты) Пусть имеется 10^6 билетов вида $abcdef$, где a, b, c, d, e, f пробегают $0, 1, \ldots, 9$. Билет назовём счастливым, если $a+b+c = d+e+f$. Найти количество N счастливых билетов.

Задача 8.(Модулярные формы) Обозначим $\varphi(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$. Докажите, что $\varphi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^{(3n^2-n)/2} + x^{(3n^2+n)/2})$. Идея: постройте «почти биекцию» между разбиениями n на чётное число слагаемых и на нечётное число слагаемых.

Поймите, как быстро считать $p(n)$ — количество разбиений n. Найти $p(50), p(100)$.

Докажите тождество Гаусса $(\varphi(x))^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{n(n+1)/2}$.

Задача 9. Для натурального n обозначим $d(n)$ количество разбиений n на различные слагаемые, $l(n)$ количество разбиений n на нечётные слагаемые. Положим $d(0) = l(0) = 1$. Найти соответствующие производящие функции $D(x), L(x)$. Доказать, что $D(x) = L(x)$. Таким образом, $d(n) = l(n)$, $n \geqslant 0$.

Придумайте, как установить биекцию между разбиениями n на различные слагаемые и разбиениями n на нечётные слагаемые.

Последовательности в комбинаторике.

Задача 1. В левом нижнем углу доски $n \times n$ стоит хромой король, умеющий ходить только в трёх направлениях: вправо, вверх, по диаглнали вправо-вверх. Обозначим A_n количество всех его маршрутов, ведущих в противоположный угол доски, а через A_n^* количество таких маршрутов, не заходящих в левый столбец и верхнюю строчку (кроме начальной и конечной позиции). Докажите, что $A_n^* = 2A_{n-1}$.

Задача 2. Лягушка прыгает по вершинам правильного треугольника ABC, каждый раз перемещаясь в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n шагов?

Задача 3. Лягушка прыгает по вершинам правильного шестиугольника $ABCDEF$, каждый раз прыгая в одну из соседних вершин.

Сколькими способами она может попасть из A в C за n прыжков?

Сколькими способами она может попасть из A в C за n прыжков, если ей запрещено попадать в вершину D?

Пусть путь лягушки начинается в вершине A, в вершине D лежит мина. Каждую секунду лягушка делает очередной прыжок. Какова вероятность того, что она будет жить через n секунд? Найти среднюю продолжительность жизни лягушек-саперов.

Задача 4. Пусть $P(n)$ — число последовательностей длины n из $0, 1$, в которых блоки нулей имеют длину $\geqslant 3$. Например, при $n = 4$ это последовательности $0000, 1000, 0001, 1111$. Вывести реккурентное соотношение для $P(n)$ (считаем $P(0) = 1$). Обозначим $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n$. Найти уравнение для $F(x)$. Найти $P(n)$.

Задачи на повторение.

Задача 1. Пункт 1. Даны непостоянные линейные функции $p(x), q(x), r(x)$. Докажите, что хотя бы один из квадратных трёхчленов $pq + r, pr + q, qr + p$ имеет действительный корень.

Пункт 2. Даны непостоянные линейные функции $p_1(x), \dots, p_n(x)$. Докажите, что хотя бы $n - 2$ из многочленов $\prod_{j \neq i} p_j(x) + p_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ имеют действительный корень.

Задача 2. Пункт 1. Пусть функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ такова, что Δf является многочленом степени n со старшим коэффициентом a. Докажите, что f является многочленом степени $n + 1$ со старшим коэффициентом $a/(n + 1)$.

Пункт 2. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n существует единственный многочлен $Q(x)$ степени $n + 1$, такой, что $\Delta Q = P$ и $Q(0) = 0$. Пусть старший коэффициент $P(x)$ равен a. Чему равен старший коэффициент $Q(x)$?

Задача 3. Пусть $F_0 = 0, F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ последовательность Фибоначчи. Покажите, что $\sum_{k=0}^{n} (F_{2^k})^{-1} = 3 - \dfrac{F_{2^n - 1}}{F_{2^n}}$.

Задача 4. Пункт 1. Найдите $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1 - \dfrac{k}{n})^n$.

Пункт 2. Докажите, что для $0 \leqslant m < n$ $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0$. Тут $0^0 = 1$.

Задача 5. Проверьте, что функция $y = e^x$ обладет такими свойствами: $y(0) = 1$ и $y'(x) = y(x)$. Какая последовательность a_n, $n \geqslant 0$ будет обладать аналогичными свойствами, если производную заменить на дискретную Δ. Напомним, что оператор Δ переводит последовательность $\{a_n\}$ в последовательность $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \geqslant 0$.

Задача 6. Пункт 1. Пусть q натуральное число, функция $f(x) = cq^x + a_n x^n + \ldots + a_0$. Докажите, что если $f(x)$ целое при $x = 0, 1, \ldots, n + 1$, то при всех целых $x \geqslant 0$ число $f(x)$ целое.

Пункт 2. Пусть выполнены условия предыдущего пункта, $f(x)$ делится на m при $x = 0, 1, \ldots, n + 1$ (тут m натуральное). Докажите, что при всех целых $x \geqslant 0$ $f(x)$ делится на m.

Пункт 3. Докажите, что при всех целых $n \geqslant 0$ число $f(n) = 2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$ делится на 27.

Задача 7. Найти все натуральные n, для которых в выражении $\pm 1^2 \pm 2^2 \ldots \pm n^2$ можно расставить знаки так, что получится 0.

Задача 8. Имеет ли уравнение $(x+y\sqrt{5})^4+(z+t\sqrt{5})^4=2+\sqrt{5}$ решение в рациональных x, y, z, t?

Задача 9. Пункт 1. Докажите, что при всех натуральных n $[(1+\sqrt{2})^n] \equiv n \pmod 2$.

Пункт 2. У чисел $(6+\sqrt{35})^{1999}$, $(6+\sqrt{37})^{1999}$, $(6+\sqrt{37})^{2000}$ найти первые 1000 знаков после запятой.

Задача 10. Пусть $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{2} + r_n\sqrt{3} + s_n\sqrt{6}$, где p_n, q_n, r_n, s_n, $n \geqslant 0$ целые. Найти $\lim_{n\to\infty}$ выражений p_n/q_n, p_n/r_n, p_n/s_n.