Функціональні рівняння: підстановки, ін'єктивність, сюр'єктивність

Літній математичний табір "Контора π"
Середня група

1 Підстановки

Вправа 1. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що для довільних* $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Вправа 2. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що для для довільних* $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y.$$

Задача 1. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *такі, що для довільного* $x \in \mathbb{R}$

$$(a - x)f(x) - 2xf(a - x) = 1.$$

Задача 2. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ *такі, що для довільного* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$f\left(\frac{1}{1 - x}\right) + f\left(\frac{x - 1}{x}\right) - f(x) = x.$$

2 Сюр'єктивність та ін'єктівність

Нехай $f^{-1}(a) = \{x : f(x) = a\}$. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ін'єктивною, якщо $|f^{-1}(a)| \leq 1$ для кожного $a \in \mathbb{R}$. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається сюр'єктивною, якщо $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ для кожного $a \in \mathbb{R}$.

Задача 3. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що для довільних* $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y.$$

Задача 4. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що для довільних* $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

3 Все разом

Задача 5. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що для довільних* $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + yf(x)) = f(f(x)) + xf(y).$$

Задача 6. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що для довільних* $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x).$$

Задача 7. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такі, що для довільних* $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(yf(x)).$$

Задача 8. *Знайдіть всі функції* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такі, що для довільних* $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y).$$

Хілько Данило
dkhilko@ukr.net