Комбінаторна теорія чисел

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Множина натуральних чисел розбита на декілька множин. Доведіть, що деяка з цих множин має наступну властивість: для кожного натурального m в цій множині є нескінченно багато множників m.

2. Нехай n – натуральне число, X – множина, що складається з $n+2$ різних цілих чисел, що не перевищують за модулем n. Доведіть, що в множині X можна вибрати три різних числа a, b, c так, щоб $a + b = c$.

3. Дано n попарно взаємнопростих чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ з проміжку $(1, (2n-1)^2)$. Доведіть, що серед цих чисел принаймні одне просте.

4. Нехай a, b – натуральні числа. Дано драбину, що складається з n сходинок. За один крок дозволяється або піднятися a на сходинок вгору або опускатися b на сходинок вниз. Відомо, що таким чином можна починаючи з першої сходинки піднятися на найвищу, а потім знову спуститися на першу сходинку. Знайдіть найменше можливе значення n.

5. Усі натуральні числа розділено на r нез'єднаних множин $A_1, A_2, \cdots, A_r$. Доведіть, що одна з них, наприклад A_i, має наступну властивість: існує натуральне число m таке, що для будь-якого натурального $k > 1$ існують числа $a_1, a_2, \cdots, a_k \in A_i$ причому $0 < a_{j+1} - a_j \le m$ для $1 \le i \le k-1$.

6. Дано n натуральних чисел з сумою меншою за $2n$. Доведіть, що для будь-якого натурального m, що не перевищує суму цих чисел можна вибрати декілька з цих чисел з сумою m.

7. Нехай c – натуральне число. Дано послідовність натуральних чисел $\{a_n\}$ таку, що $a_n < a_{n+1} < a_n + c$ для кожного натурального n. Нехай s – нескінченна строка цифр утворена послідовним записом елементів $\{a_n\}$ з ліва направо. Для кожного натурального k розглянемо число s_k утворене першими k цифрами строки s. Доведіть, що для кожного натурального m існує натуральне k таке, що s_k ділиться на m.

8. Нехай $m \ge 2$ – натуральне число. Знайдіть найменше таке $n > m$, що для будь-якого розбиття множини $\{m, m+1, \cdots, n\}$ на дві підмножини хоча б одна з них містить три елемента a, b, c такі, що $c = a^b$.

9. Доведіть, що існує нескінченна послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, \cdots$ така, що:
   а). Кожне натуральне число зустрічається рівно один раз у цій послідовності;
   б). Кожне натуральне число зустрічається рівно один раз у послідовності $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \cdots$.

10. Нехай A – множина з N остач $\bmod N^2$. Доведіть, що існує множина B з N остач $\bmod N^2$ така, що множина $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ містить принаймні половину усіх остач $\bmod N^2$.

11. Нехай k, m, n – натуральні числа такі, що $1 < n \le m - 1 \le k$. Визначте найбільший можливий розмір множини $S \subset \{1, 2, \cdots, k\}$, щоб сума жодних n різних елементів з S не дорівнювала m.

12. Визначте чи існує натуральне число n, що задовольняє наступну умову: усі натуральні числа можна розбити на n непорожніх множин так, щоб сума будь-яких $n-1$ чисел, кожні два з яких належать різним множинам, належить множині якій не належить жодне з вибраних чисел.

13. Нехай n – натуральне число. Знайдіть кількість послідовностей натуральних чисел довжини n, що задовольняють умову: Для будь-якого $k \ge 2$ якщо k є в цій послідовності, то число $k-1$ також є в цій послідовності, причому перше входження $k-1$ знаходиться лівіше ніж останнє входження k.

14. Нехай x, y – два непарних цілих числа, $|x| \neq |y|$. Усі цілі числа пофарбували в один з чотирьох кольорів. Доведіть, що знайдуться два числа одного кольору чия різниця приймає одне з наступних значень: $x, y, x + y, x - y$

15. Нехай $m > n \geq 2$ – натуральні числа. Нехай $S = \{1, 2, \cdots, m\}$ і $T = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ – підмножина з S така, що кожен елемент з S не ділиться одночасно на жодну пару різних елементів з T. Доведіть, що $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{m+n}{m}$.