Підготовка до міської олімпіади

1. Для чисел $x_1, \ldots, x_n$ з проміжку $[0;1]$ доведіть нерівність
$$(1 + x_1 + \cdots + x_n)^2 \geq 4(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

2. Для додатніх чисел a, b доведіть нерівність
$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

3. Натуральні числа m, n, k такі, що m^n ділиться на n^m, а n^k ділиться на k^n. Доведіть, що m^k ділиться на k^m.

4. Доведіть, що одне з двох послідовних натуралних чисел обов'язково можна представити у вигляді $n + S(n)$, де n — натуральне число, а $S(n)$ — його сума цифр.

5. Числа x та y задовольняють умові $x^3 + y^3 = x - y$. Доведіть, що тоді
$$x^2 + y^2 < 1.$$

6. Одне з кіл радіуса R проходить через вершини A і B, а друге — через вершини B і C паралелограма $ABCD$. Доведіть, що якщо M — їх друга точка перетину, то радіус описаного кола трикутника AMD теж дорівнює R.

7. Числа $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ розбиті на дві рівні групи. Нехай $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ — числа першої групи, а $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ — числа другої групи. Доведіть, що
$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2.$$