

## КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА 2

1. Докажите, что если  $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$ , то  $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\alpha$ .

2. Вычислите сумму

$$C_{3n}^1 + C_{3n}^4 + \dots + C_{3n}^{3n-2}.$$

3. Докажите равенство

$$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \dots = \frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}} \sin \frac{n\pi}{6}.$$

4. Вычислите сумму

$$\cos \phi + C_n^1 \cos 2\phi + \dots + C_n^n \cos (n+1)\phi.$$

5. Найдите все многочлены такие, что

$$P(x^2) = P(x)P(x-1).$$

6. Найдите все многочлены такие, что

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+1).$$

7. Даны многочлены с действительными коэффициентами  $P(x), Q(x), R(x), S(x)$  такие, что

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$

Докажите, что  $P(1) = 0$ .

8. Про многочлены  $P(x), Q(x)$  известно, что  $P(x^3) + Q(x^3) \vdots x^2 + x + 1$ . Докажите, что

$$P(x) + Q(x) \vdots (x-1).$$

9. Пусть  $P(x)$  — многочлен с действительными коэффициентами такой, что  $P(|i|) < 1$ . Докажите, что существуют действительные  $a$  и  $b$  такие, что  $P(a+bi) = 0$  и  $(a^2 + b^2 + 1)^2 < 4b^2 + 1$ .