Задавальник «Новорічний»

1.1)* Для яких n квадрат можна розрізати на n трикутників однакової площі? *(Пол Монскі)*
1.2)* Доведіть, що існують чотирикутники, які не можна розрізати ні на яку кількість трикутників однакової площі.
2.1) Доведіть, що для простих p існує нескінченна кількість простих чисел виду $kp+1$.
2.2) Доведіть, що для натуральних m існує нескінченна кількість простих виду $km+1$.
3.1) Доведіть, що e, e^2, e^4 - ірраціональні.
3.2)* Доведіть, що e^r, та π^2 - ірраціональні, де $r \in \mathbb{Q}/\{0\}$. *(Шарль Ермiт)*
4.1) Для довільної множини точок, що не всі лежать на одній прямій, знайдеться пряма, що містить рівно 2 точки. *(задача Сільвестра-Галлаі)*
   Наслідок: Для довільної множини з n точок існують n різних прямих, що проходять хоча б через 2 з них. *(Ердьош-де Брейн)*
4.2) Нехай множина X складається з $n \geq 3$ елементів. Розглянемо власні підмножини (не рівні X) $A_1, A_2, ...A_m$ такі, що кожна пара елементів з X міститься тільки в одній підмножині A_i. Тоді $m \geq n$. *(Теорема Ердьоша-де Брейна)*
4.3) Нехай повний граф K_n розкладений на m клік (повних підграфів), відмінних від K_n. Тоді $m \geq n$. (граф називається розкладеним на підграфи, якщо кожне його ребро належить рівно одному підграфу)
4.4)* Якщо K_n розкладений на m повних дводольних підграфів (проведені всі ребра між двома долями), то $m \geq n-1$. *(Теорема Грехема-Поллака-Тверберга)*
4.5) Для довільної скінченної множини білих та чорних точок на площині, що не всі лежать на одній прямій, існує пряма, що проходить принаймні через 2 точки одного кольору та не містить точок іншого кольору. *(Теорема Чекеріана)*
5)* Якщо $n \geq 3$ точок на площині не лежать на одній прямій, то вони визначають не менше $n-1$ напрямків (число попарно не паралельних прямих, що проходять хоча б через 2 з цих точок) . При цьому рівність можлива лише, якщо $n \geq 5$ - непарне. (*Теорема Скотта,* доведення *Гудман-Поллак-Унгар)*
6) Нехай $p(x) \in \mathbb{R}_{[x]}$. $\deg(p) \geq 1$, старший коефіцієнт рівний 1. Тоді

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \textit{(Теорема Чебишева)}$$

7) Якщо коротка $(l \leq d)$ голка довжини l кидається на папір, на якому проведені паралельні прямі на відстані d, то ймовірність того, що впавша голка перетне одну з прямих рівна $p = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}$. *(Теорема «Задача Бюффона про голку»)*
8)** Кожна неперервна функція $f: B^n \to B^n$ має нерухому точку, тобто існує $x = f(x)$. B^n - опукла n-вимірна фігура. *(Теорема Брауера)*
Розглянути випадок площини та функції визначеної на трикутнику.
9.1) Нехай F - сімейство підмножин множини A з n елементів, таке що для довільних $B, C \subset F$ виконується $B \not\subset C$. Тоді $|F| \leq C_n^{[n/2]}$. *(Лема Шпернера)*
9.2) Нехай F - сімейство k-елементних підмножин множини A з n елементів, таких, що кожні дві підмножини перетинаються. Тоді $|F| \leq C_{n-1}^{k-1}$ *(Теорема Ердьоша-Ко-Радо)*
10.1) Латинським квадратом $n \times n$ називається квадрат клітинки якого заповнені числами так, що в кожному рядку та в кожному сповпці присутні всі n чисел з множини $\{1, 2, ..., n\}$. Довести, що заповнений латинський прямокутник $r \times n$ (так, що в кожному рядку і стовпчику кожне число зустрічається не більше 1 разу – надалі, правило латин. квадрата), можна дозаповнити до латинського квадрата.

10.2) Нехай в квадраті $n \times n$ заповнено $n-1$ клітинку не більш як $\frac{n}{2}$ різними числами (за правилами латинського квадрата). Довести, що це заповнення можна доповнити до латинського квадрата.
10.3) Нехай в квадраті $n \times n$ заповнено $n-1$ клітинку (за првилами лат. квадарата). Довести, що його можна доповнити до латинського квадрата. *(Теорема Сметанюка)*
11)* Розглянемо квадрат $n \times n$. Для кожної клітинки (i, j) визначена множина $C_{(i,j)}$ з n кольорів. Чи завжди можна заповнити кожну клітинку (i, j) своїм кольором з множини $C_{(i,j)}$ так, щоб в кожному рядку і в кожному стовпчику всі кольори були різними? *(Задача Дініца*, розв»язок: *Фред Галвін)*
12) Музей в формі n-кутника (не обов»язково опуклого) охороняють m охоронців. Охоронці завжди стоять на одному місці. Точка всередині музею охороняється, якщо існує відрізок між цією точкою та якимось охоронцем, який повністю лежить всередині музею. Доведіть, що для охорони музею достатньо мати $\left[\frac{n}{3}\right]$ охоронців. (постановка: *Віктор Клі*, доведення *Вашек Чватал, Стів Фіск*)
13) Якщо в графі у довільних двох вершин є рівно один спільний сусід, то є вершина, з»єднана з усіма. *(Ердьош-Реньє-Сос)*
14) $R(k,t)$ - число Рамсея - найменше число, що в повному графі з такою кількістю вершин, ребра якого пофарбовані в 2 кольори обов»язково знайдеться повний k-підграф першого кольору або повний t-підграф другого кольору. Довести, $R(k,k) \geq 2^{k/2}$.
15) Розглянемо трикутну таблицю , утворену клітинками, що лежать нижче головної діагоналі квадрата $n \times n$. Довести, що всі клітинки таблиці не можна розрізати на триклітинні горизонтальні, вертикальні та діагональні (паралельні основній діагоналі) блоки.
16.1)* Якщо прямокутник розрізано на квадрати, то відношення довжин його сторін раціональне.
16.2) Якщо прямокутник розрізано на прямокутники, одна з сторін яких ціла, то одна з сторін початкового прямокутника теж ціла.
16.3) Якщо прямокутник $m \times n$ розрізано на прямокутники $p \times q$, то або $m \vdots p$, або $n \vdots p$, та або $m \vdots q$, або $n \vdots q$.
17.1) Нехай $R_n = \{1, \dots n\}$ та $K = \{K_1, \dots, K_{C_n^k}\}$ - сукупність всіх k-елементних підмножин множини R_n. Нехай $k \leq n/2$. Тоді сукупність K можна представити як об»єднання $n-2k+2$ сукупностей, елементи кожної з яких попарно перетинаються. *(Теорема Кнезера)*
17.2)* Сукупність K не можна представити як об»єднання $n-2k+1$ сукупностей, елементи кожної з яких попарно перетинаються. *(Гіпотеза Кнезера,* доведена *Л.Ловас)*
18) Квадрат $ABCD$ розрізаний на однакові прямокутники. Пофарбуємо всі прямокутники, які розрізає діагональ AC. Довести, що AC ділить площу пофарбованої частини навпіл *(Произволов)*
19.1) p - просте. Нехай $\left(\frac{a}{p}\right)$ - символ Лежандра (при $a \vdots p$ він рівний 0). Позначимо

$\Phi_p(f) = \sum\limits_{x \bmod p} \left(\frac{f(x)}{p}\right)$. Позначимо $N[\textit{рівняння} \bmod p]$ - кількість розв»язків цього рівняння, де змінні пробігають остачі $\bmod p$.

Довести $N[f(x) \equiv y^2 \bmod p] = p + \Phi_p(f)$.

19.2) Знайти кількість $N[x^2 + bx + c \equiv y^2 \bmod \mathrm{p}]$

19.3)* Знайти $\Phi_p((x+1)(x+2)(x+3))$.

19.4) Довести, що для $p \equiv 1 \bmod 3$ існує розклад в суму квадрата та потроєного квадрата.