Комплексні числа–2

1. Обчисліть $z = \dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i}$.
2. Нехай $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Доведіть, що число $z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}$ — дійсне.
3. Доведіть, що для будь-якого комплексного числа z виконується принаймні одна із нерівностей
$$|z+1| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{або} \quad |z^2+1| \geqslant 1.$$
4. Нехай $z_1 = 1 + i$ і $z_2 = 1 - i$. Знайдіть усі $z_3 \in \mathbb{C}$ такі, щоб трикутник, вершинами якого є z_1, z_3, z_3, був рівносторонній.
5. Виразіть а) $\sin^7 \alpha$ через $\sin \alpha$; б) $\cos^7 \alpha$ через $\cos \alpha$.
6. Розв'яжіть рівняння $z^5 = 1$ та зобразіть ці точки на комлексній площині.
7. Розв'яжіть рівняння $z^6 - z^3(1+i) + i = 0$.
8. Зобразіть на комлексній площині множини, що описуються такими умовами а) $\dfrac{1+\bar{z}}{z} \in \mathbb{R}$; б) $\operatorname{Re} \dfrac{z-2}{z-1} = 0$.
9. Нехай $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Доведіть, що дріб $\dfrac{a^2+b^2}{ac+bd}$ нескоротний, якщо
$$ad - bc = 1.$$