Двойное домашнее задание

1 Старое.

1. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, которые удовлетворяют
$$(P(x))^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x).$$
2. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$
3. Для положительных чисел A, B и действительных $a_1, a_2, \dots a_n$, $b_1, b_2, \dots b_n$ для которых выполняется $A^2 > a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ и $B^2 > b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$ докажите неравенство
$$(A^2 - a_1^2 - \dots - a_n^2)(B^2 - b_1^2 - \dots - b_n^2) \leq (AB - a_1 b_1 - \dots - a_n b_n)^2.$$
4. Для положительных чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ докажите неравенство
$$(a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n)^3 \leq (a_1^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + \dots + c_n^3).$$

2 Новое

1. Найдите все пары целых чисел a, b таких что числа
$$\frac{a^3 b - 1}{a+1}, \frac{b^3 a + 1}{b-1}$$
целые.
2. Найдите все простые p и натуральные x, y такие, что
$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p.$$
3. Для некоторого натурального n оказалось, что число
$$\frac{8^n + n}{2^n + n}$$
целое. Докажите, что $n < 10$.
4. Обозначим $d(k)$ количество всех делителей числа k. Найдите все натуральные числа n, что
$$d(n)^3 = 4n.$$

3 Старое.

1. Дано натуральное число $n > 2$. Докажите, что
$$(\phi(a^n - 1), n) > 1$$
.
2. Найдите все простые числа p, q такие, что
$$2p^q - q^p = 7$$
3. Докажите, что простых чисел вида $pk + 1$, где p — простое, бесконечно много.

4 Новое

1. Игра происходит на клетчатом поле 9×9. Играют двое, ходят по очереди, начинает первый. Он ставит в свободные клетки крестики, второй игрок — нолики. Когда все клетки заполнены, подсчитывается количество строк и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов, — число K, и количество строк и столбцов, в которых ноликов больше, чем крестиков, — число H. Разность $K - H$ считается выигрышем первого. Найдите такое число B, для которого одновременно выполняются условия: первый игрок может себе обеспечить выигрыш не меньше B, а второй может всегда проиграть не больше B.

2. Двое по очереди красят стороны n-угольника. Первому разрешается красить сторону, у которой оба соседа покрашено или не покрашено ни одного, а второму можно покрасить сторону с ровно одним покрашеным соседом. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто побеждает при правильной игре?

3. Дана таблица 2013×2013. Двое играют в такую игру: в свой ход первый красит незакрашенный до этого квадрат 2×2 в синий цвет, а второй красит незакрашенный до этого квадрат 1×1 в жёлтый цвет. Когда первый уже не может закрасить квадрат 2×2, второй закрашивает нетронутые клетки в жёлтый цвет, и на этом игра заканчивается. Если на доске синих клеток больше, чем жёлтых, то побеждает первый. Иначе побеждает второй. Кто выиграет при правильной игре?

4. Есть шоколадка в форме правильного треугольника со стороной n, разделённая бороздками на маленькие треугольники со стороной 1 (каждая сторона поделена на n частей, точки деления на каждой стороне соединены линиями, параллельными третьей стороне). Играют двое. За ход можно отламать от шоколадки треугольный кусок (вдоль какой-нибудь бороздки), съесть его и передать остаток противнику. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Тот, кто получит последний кусок - треугольничек со стороной 1, — победитель. Для каждого n выясните, кто из играющих всегда может победить, как бы не играл противник?

5. Первый игрок задумал целое число, большее 100. Второй игрок называет целое число $d > 1$. Если число первого делится на d, то второй выиграл, иначе первый отнимает от задуманого числа d и игра продолжается. Называть числа, уже названные запрещается. Когда число первого станет отрицательным, второй проигрывает. Может ли второй действовать таким образом, чтоб гарантировано выиграть?