Інверсія повертається знову

В один із днів повернеться весна.

С. Жадан

Розглянемо деяке коло ω з центром O та радіусом r. Інверсія відносно кола ω — перетворення площини, за якого кожній точці (крім центра кола) A ставиться у відповідність точка A' така, що A' належить променю OA і $OA \cdot OA' = r^2$.

Нагадаємо, що

- інверсну точку A' до точки A легко побудувати;
- точки A, B, A', B' лежать на одному колі;
- $$A'B' = \frac{r^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$$
- пряма, що проходить через центр інверсії, переходить в себе;
- пряма, що не проходить через центр інверсії, переходить в коло, що проходить через центр інверсії;
- коло, що проходить через центр інверсії, переходить в пряму, що не проходить через центр інверсії;
- Коло, що не проходить через центр інверсії, переходить в коло;
- Коло, ортогональне колу інверсії, переходить в себе;
- Якщо об'єкти (кола, прямі) дотикались до інверсії, то вони будуть дотикатися після інверсії.

Задача 1. На площині задано два кола і точку A. Побудуйте коло, що дотикається до цих двох кіл і проходить через A.

Задача 2. Нехай P — така точка всередині трикутника ABC, що

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Точки E, F — інцентри трикутників APB та APC відповідно. Доведіть, що BD та CE перетинаються на AP.

Задача 3. Чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола з центром I. Дотичні в точках A і C до кола AIC перетинаються в точці X, а дотичні в точках B і D до кола BID перетинаються в точці Y. Доведіть, що X, I, Y лежить на одній прямій.

Задача 4. Дано півколо Ω з діаметром PQ. Коло ω дотикається до PQ в точці C та до Ω внутрішнім чином. На Ω та PQ вибрано точки A та B таким чином, що $AB \perp PQ$, AB дотикається до ω, а також C та Q лежать в різних півплощинах відносно AB. Доведіть, що AC — бісектриса кута $\angle PAB$.

Задача 5. З точки K проведені дотичні KL та KN до кола ω. На продовженні прямої KN за точку N взято точку M. Описане коло трикутника KLM вдруге перетинає ω в точці P. Нехай Q — основа перпендикуляру з точки N на ML. Доведіть, що $\angle QPM = 2\angle LTN$.

Задача 6. На прямій лежать точки A, B, C у вказаному порядку. Позначимо півколо з діаметром AB через ω_1, півколо з діаметром BC через ω_2, а півколо з діаметром AC через AC ($\omega, \omega_1, \omega_2$ лежать в одній півплощині відносно AB). Послідовність кіл k_n ($n \geq 0$) будується таким чином: $\omega_2 = k_0$, а k_n дотикається до $\omega, \omega_1, k_{n-1}$. Доведіть, що відстань від центра k_n до AB в $2n$ разів більша за радіус k_n.

Додому

Задача 1. Побудуйте точку перетину параболи з прямою циркулем та лінійкою. (Параболи немає на площині, а є тільки фокус та діректриса).

Задача 2. На прямій лежать точки A, B, C у вказаному порядку. Побудовано два півкола k та l з діаметрами AB та BC в одній площині відносно AB. Коло ω дотикається до k, до l в точці T та до перпендикуляру до прямої AB, побудованому в точці C. Доведіть, що AT дотикається до ω.

Задача 3. Кола ω_1 та ω_2 пересекаюперетинаються в точках M и N. Через точку M будуються дотичні до кіл ω_2 та ω_1, що вдруге перетинають ω_1 в A та ω_2 в B відповідно. Доведіть, що чотирикутник $MACB$ вписаний, де C — точка, симетрична до M відносно N.

Задача 4. Дано вписаний чотирикутник $ABCD$. Доведіть, що на сторонах AB та CD знайдуться точки M, N відповідно, що відрізок MN ділить навпіл кути $\angle ANB$ та $\angle CMD$. Побудуйте ці точки циркулем і лінійкою.

Задача 5 (Три плюсики). З точки A проведено дві дотичні AB та AC до кола ω. Коло ω_1, що лежить всередині трикутника ABC, дотикається зовнішнім чином до ω та до AB в точці K. Коло ω_2, що також лежить всередині трикутника ABC, дотикається зовнішнім чином до ω, до ω_1 в точці J та до A в точці L. Нехай I — інцентр трикутника ABC. Доведіть, що чотирикутники $BKJI$ та $CLJI$ вписані.