**Завдання ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2013-2014 рік**

***ІІ тур***

**7 клас**

**1.** Банк ОГОГО обмінює гривні на тугрики по 400 грн за тугрик та ще знімає 500 гривень за право обміну незалежно від суми. Банк ЙОХОХО обмінює за тугрик 401 гривню, а за право обміну знімає 1 тугрик (теж незалежно від суми обміну). Турист визначив, що йому байдуже, в якому з банків здійснювати обмін грошей. Яку суму він збирався обміняти ?

**Розв’язання:** Якщо турист збирався обміняти X грн, то в банку ОГОГО він отримає за них (X – 500) / 400 тугриків, а в банку ЙОХОХО X / 402 – 1 тугриків.

Розв’язуючи рівняння ( x – 500 ) / 400 = X / 402 – 1, отримаємо X = 39600 (грн).

**Відповідь:** 39600 грн.

**2.** Знайдіть всі натуральні числа *n* та *m* такі, що задовольняють рівність  
*mn* - 4 = (*m* + 1)2.

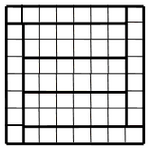
**Розв’язання:** За умовою m(n-m-2)=5. Оскільки n і m – натуральні числа, то можливі випадки: m=1, n-m-2=5 або m=5, n-m-2=1.

**Відповідь:** m=1, n=8 або m=5, n=8.

**3.** ΔABC – прямокутний трикутник з гіпотенузою AB. На прямій AB по обидва боки від гіпотенузи АВ відклали відрізки ВK = ВC і АM = АC. Знайдіть кут KCM.

**Вказівка:** ∠АВС=2∠ВСМ, ∠ВАС=2∠КСА ⇒

∠МСК=∠МСВ+∠ВСА+∠АСК=0,5(∠АВС+∠ВАС)+∠ВСА=135°.



**4.**Чи можна квадрат зі стороною 5 м розрізати на 7 прямокутників, не обов’язково однакових, кожен з яких має периметр 10 м?

**Розв’язання:** Можна. Наприклад відрізавши по периметру квадрата чотири прямокутники із сторонами  м і  м, а потім розрізавши квадрат, що залишився на прямокутники із сторонами  м і  м (див. рис.).



**8 клас**

**1.** Числа *а*, *b*, *c* такі, що *a*+*b*+*c*=6, . Знайдіть значення виразу  .



**Розв’язання:**



**Відповідь:** 1,8.

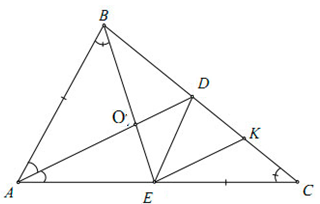
**2.** Назвемо просте число «гарним», якщо при будь якій перестановці його цифр знову отримаємо просте число. Яка максимальна кількість різних цифр може бути в записі «гарного» числа?

**Розв’язання:**

В записі «гарних» чисел не може бути парних цифр і цифри 5, тому, що числа, які ними закінчуються будуть ділитися на 2 або на 5. Залишається перевірити чи будуть «гарними» числа в записі яких зустрічаються цифри 1;3;7;9. Числа 1397=11⋅127, 371=7⋅53, 319=11⋅29, 791=7⋅113, 793=13⋅61 – складені. Тому «гарними» не є числа в записі яких зустрічаються три або чотири різні цифри. Число 17 є «гарним».

**Відповідь:** дві.

**3.** В трикутнику *АВС* точка *Е* належить стороні *АС,* кути *ABЕ* і *BCЕ* рівні, *АВ=ЕC,AD* *-* бісектриса трикутника *АBC*. Довести, що пряма *ED* паралельна прямій *АВ*.



**Розв’язання:**

Проводимо EK⎥⎥ AD ⇒ ΔAOB=ΔEKC ⇒

EK=AO. EODK – вписана в коло трапеція. Тому ОЕ=DK.

ΔAOE=ΔEKD ⇒ AE=ED, ∠ODE=∠OAE ⇒ DE⎥⎥ AB.

**4.** Два гравці по черзі зафарбовують клітинки на клітчастій дошці розміром 16х11. Кожним ходом зафарбовується декілька клітинок, що утворюють квадрат. Зафарбовувати клітинки двічі не дозволяється. Виграє той, хто зафарбовує останню клітинку. Довести, що гравець, який ходить першим, завжди може виграти.

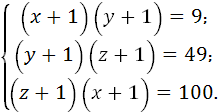
**Вказівка:** Перший гравець по центру ставить квадрат 10х10, а далі симетрично повторює ходи другого гравця.

**9 клас**

**1.** Знайдіть усі значення виразу 2x + 3y + 4z - xyz для додатних чисел x, y, z, які задовольняють систему рівнянь:



**Вказівка:** ⇒



, ; , ; , 



2x + 3y + 4z - xyz= .



**2.** Знайдіть всі пари (*x*,*y*)  цілих чисел *x* і *y*, що задовольняють рівність

*x*4+*x*3*y*+2*x*2+*y*+1=*x*3+*x*.

**Розв’язання:**

*x*4+*x*3*y*+2*x*2+*y*+1=*x*3+*x* ⇒ (*x*2+1)2+(*x*3+1)*y*=x(*x*2+1) ⇒

(*x*2-*x*+1) (*x*2+1 +(*x*+1)*y*)=0

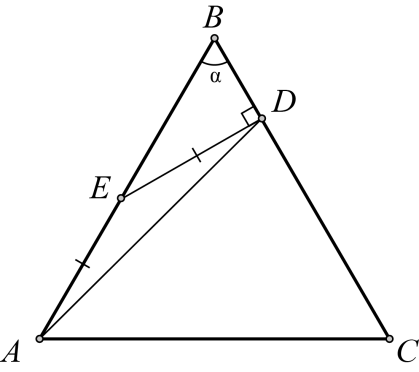
Оскільки *x*2-*x*+1≠0, то *x*2+1 +(*x*+1)*y*=0 ⇒ *x*2-1 +(*x*+1)*y* +2=0 ⇒

(*x*+1)(*x*-1 +*y*) +2=0 ⇒ (*x*+1) ділить 2. Тому *х*=0 або *х*=1 або *х*=-2 або *х*=-3.

**Відповідь:** (0;-1), (1;-1), (-2;5), (-3;5).

**3.** Нехай ABC рівнобедрений трикутник такий, що АВ=ВС. На стороні AB вибрали точку Е. Нехай D основа перпендикуляра опущеного з точки E до сторони BС. Відомо, що АE=DE. Знайдіть градусну міру кута ∠DAC.

**Розв’язок:** Нехай кут  (див. мал.).



За теоремою про суму кутів трикутника , а . Оскільки трикутник  рівнобедрений, а зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним, то . Отже, .

**4.** На острові живуть лицарі, які завжди говорять правду, шахраї, які завжди обманюють, і дипломати, які деколи говорять правду, а деколи обманюють. Подорожній запитав у чотирьох місцевих жителів котра година. Троє відповіли: «Третя година дня», а один: «Четверта година дня». Через деякий час на це саме запитання двоє відповіли: «Четверта година дня», а двоє: «П’ята година дня». Відомо, що серед чотирьох опитаних був лицар. Доведіть, що серед них був дипломат.

**Розв’язання:** Припустимо, що серед чотирьох опитаних є лише лицарі і брехуни. Нехай під час першої спроби лицар відповів «Третя година дня». Тоді серед опитаних ще двоє людей є лицарями і на наступне запитання троє людей повинні були дати однакову відповідь. Це протирічить умові. Тому серед чотирьох опитаних троє шахраїв і один лицар. Знову протиріччя, оскільки в такому разі на друге запитання один шахрай і один лицар відповіли б однаково. Тому серед чотирьох опитаних принаймні один був дипломатом.

**10 клас**

**1.** Спростіть вираз



**Розв’язання :**

Позначимо . Тоді 



**Відповідь:** .

**2.** Доведіть,  що  для  будь яких  додатних  чисел  x  і  y  виконується

нерівність .

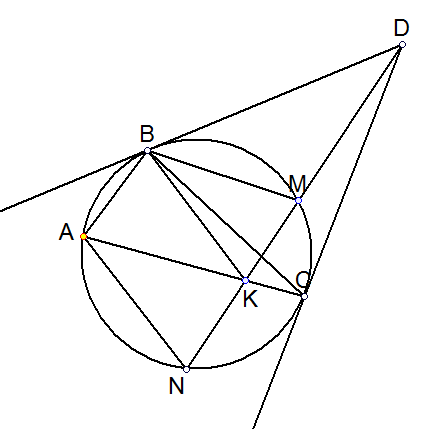


**Розв’язання:**

Оскільки , , то



**3.** В кут BDC вписано коло, яке дотикається до його сторін в точках В і С. Пряма, що проходить через точку D перетинає коло в точках N і M. Через точку В провели пряму паралельну до прямої NM, яка перетинає коло в точці А (відмінній від точки В). Доведіть, що АС ділить відрізок NM навпіл.



**Доведення:**

За умовою задачі ABMN – рівнобічна трапеція. Тому ∪AN=∪BM, ∪BC=(∪BM+∪MC)= (∪AN+∪MC), ∠DBC=∠MKC. Навколо чотирикутника BDCK можна описати коло. Значить ∠BKM=∠BCD=∠CBD= =∠DKC=∠AKN ⇒ ΔANK=ΔBMK ⇒ NK=KM.



**4.** Доведіть, що не існує таких функцій f і g, які визначені на всій дійсній осі і набувають дійсних значень та задовольняють рівність f(x+g(5y))=x2+y2+xy для довільних дійсних чисел x і y.

**Доведення:**

Якщо у=0, то f(x+g(0))=x2. Отже, f(x)=(x-g(0))2. Перепишемо початкову рівність у вигляді (x+g(5y)-g(0))2=x2+y2+xy. Підставимо х=0.

Тоді (g(5y)-g(0))2=y2 ⇒ g(5y)-g(0)=±y ⇒ g(5y)=g(0)±y, (x±y)2=x2+y2+xy, що не є тотожністю для всіх х та у.

**11 клас**

**1.** Розв’яжіть систему рівнянь:



**Розв’язання:** Перепишемо перше рівняння у вигляді

. Розглянемо функцію . Очевидно, що вона зростаюча. Тому ⇔ *x*=*y*. Підставивши *y*=*x* у друге рівняння отримаємо, що ⇒ ⇒ *x* = ±2.



**Відповідь:**(2; 2), (-2;-2).

**2.** Знайдіть всі натуральні числа *x*, *y*, *z, k,* які задовольняють рівність *x*!+*y*!+*z*!=*k*!, де *n*!=1⋅2⋅3⋅…⋅*n*.

**Розв’язання:**

Можна вважати, що x≤y≤z. Тоді z<k ⇒ z+1≤k.

Якщо z+1>3, то *k*!=*x*!+*y*!+*z*!≤3z!<(z+1)z!=(z+1)!≤k!, що неможливо.

Тому z=1 або z=2. Якщо z=1, то x=y=z=1, k!=3, що неможливо.

Якщо z=2, то x=y=1, z=2, k!=4 або x=1, y=2, z=3, k!=9, що також неможливо. Залишається єдина можливість x=y= z=2, k=3.

**Відповідь:** (2;2;2;3).

**3.** Курс акцій компанії „За дарма продакшн” кожного дня о 10:00

   підвищується або понижується на 11 відсотків (курс не округлюється).

  Чи може курс акцій двічі набувати одного і того ж значення ?

**Розв’язання:** Нехай S – початковий курс акцій. Тоді в деякий день курс акцій буде S⋅1,11n⋅0,89m. Припустимо, що курс акцій двічі набуває одного і того ж значення. В такому разі S⋅1,11n⋅0,89m= =S⋅1,11a⋅0,89b ⇒

⇒1,11n-a⋅0,89m-b=1⇒ 111n-a⋅89m-b= 100a+b-n-m. Ліва частина рівності ділиться на 3, а права ні. Протиріччя.

**Відповідь:** не може.

**4**.  В трикутнику  *АВС*  сторона *AC* найменша. На сторонах *AB* та *CB* взяли точки *K* та *L*, відповідно, такі що *KA=AC=CL*. Нехай *M* - точка перетину *AL* та *KC*, а *I* - центр вписаного в трикутник *АВС* кола, точки *М* та *І* не співпадають. Доведіть, що пряма *MI* перпендикулярна до прямої *AC*.

**Розв’язання:**

Оскільки ΔАКС – рівнобедрений, то АІ – його бісектриса і висота. Аналогічно СІ – бісектриса і висота трикутника ALC. Це означає, що І –точка перетину висот трикутника АМС. Тому МІ також висота трикутника АМС. Тим самим доведено, що пряма *MI* перпендикулярна до прямої *AC*.

2 лютого 2014 р.

На виконання завдання відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування довільними зовнішніми джерелами інформації,**

**а також будь-якими електронними засобами забороняється**

**Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті**

[**www.zakinppo.org.ua**](http://www.zakinppo.org.ua)