# Домашка 18.05.14

## 1 Старое

1. Докажите равенство
$$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \dots = \frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}} \sin\frac{n\pi}{6}.$$

2. Вычислите сумму
$$1 + C_n^1 \cos\phi + \dots + C_n^n \cos n\phi.$$

3. Найдите все многочлены такие, что
$$P(x)P(x+1) = P(x^2+1).$$

4. Про многочлены $P(x), Q(x)$ известно, что $P(x^3) + Q(x^3) \vdots x^2 + x + 1$. Докажите, что
$$P(x) + Q(x) \vdots (x-1).$$

5. Пускай $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами такой, что $P(|i|) < 1$. Докажите, что существуют действительные $a$ и $b$ такие, что $P(a+bi) = 0$ и $(a^2+b^2+1)^2 < 4b^2+1$.

   **Подсказка.** Распишите многочлен $P(x)$ как произведение скобок вида $(x - x_i)$, где $x_i$ — корень. Вспомните, что, если у вас числа $z$ — корень, то и сопряжённое к $z$ — корень.

## 2 Новое

1. Дан выпуклый $2n$-угольник. Его вершины разбиваются на $n$ пар и проводятся диагонали, которые соединяют вершины из одной пары. Докажите, что способов так разбить вершины на пары, чтоб построенные диагонали не пересекались — число Каталана $C_n$.

2. Назовём "ступеньками"фигуру из $\frac{n(n+1)}{2}$ клеток, которая являются частью квадрата $n \times n$ от одного его угла до диагонали. Докажите, что количество способов разбить "ступеньку"ровно на $n$ прямоугольников равно числу Каталана $C_n$.

3. Сколько существует последовательностей $(a_1, \dots, a_n)$ целых чисел, что $a_1 = 0$ и $0 \le a_k \le a_{k-1}+1$, $1 < k \le n$?

4. Последовательность чисел $c_i$ задана правилом: $c_0 = 1$, $c_{2k+1} = c_k$ $k \ge 0$, $c_{2k} = c_k + c_{k-2^e}$ $k \ge 1$, где $e$ — самая большая степень двойки, что $2^e | k$. Докажите, что
$$\sum_{i=0}^{2^n-1} c_i = C_{n+1},$$
при $n \ge 1$, где $C_n$ $n$-тое число Каталана.

   **Подсказка.** Рассмотрите двоичную запись чисел от 0 до $2^n - 1$. Рассмотрите какую-нибудь комбинаторную интерпретацию чисел Каталана и докажите, что сумма $c_i$ считает все элементы этой интерпретации.

5. Дана последовательность натуральных чисел $a_0 = 1, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} = 1$, $a_i \ge 2$ при $1 \le i \le n$ такая, что $a_{i-1} + a_{i+1}$ делится на $a_i$. Докажите, что существует $i$ такое, что $a_{i-1} + a_{i+1} = a_i$, и всего таких последовательностей чисел — число Каталана $C_n$.

Можете ещё почитать теорию вот здесь: http://www.geometer.org/mathcircles/catalan.pdf