6-й Київський турнір математичних боїв імені Лесі Рубльової

Математичний бій № 3

Старша ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. Нехай P – внутрішня точка трикутника ABC. Показати, що для звичайних позначень трикутника справджується нерівність: $\frac{PA}{a} + \frac{PB}{b} + \frac{PC}{c} \geq \sqrt{3}$.

   Розв'язання. Позначимо через Q – центроїд $\triangle ABC$. Тоді ми маємо: $\sum \frac{PA}{a} = \sum \frac{PA \cdot GA}{a \cdot GA} \geq \sum \frac{PA \cdot GA}{\max\{a \cdot GA, \ldots\}} = \frac{\sum PA \cdot GA}{\max\{a \cdot GA, \ldots\}}$. З визначення скалярного добутку $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{GA} \leq PA \cdot GA$, тому

$$\sum PA \cdot GA \geq \sum \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{GA} = \sum \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}\right) \cdot \overrightarrow{GA} =$$

$$= \overrightarrow{PG} \cdot \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \sum GA^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

   З іншого боку,

$$\sqrt{3}a \cdot m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a(2m_a) = \frac{\sqrt{3}}{2} a\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}(3a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

   оскільки $GA = \frac{2}{3}m_a$, то ми довели, що

$$\sqrt{3}a \cdot GA \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{4}{9}\sum m_a^2 = \sum GA^2,$$

   аналогічно $\sqrt{3}b \cdot GB \leq \sum GA^2$, $\sqrt{3}c \cdot GC \leq \sum GA^2$. Тобто $\max\{a \cdot GA, \ldots\} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sum GA^2$. Об'єднуючі останні результати остаточно одержимо, що

$$\sum \frac{PA}{a} \geq \frac{\sum PA \cdot GA}{\max\{a \cdot GA, \ldots\}} \geq \frac{\sum GA^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}\sum GA^2} = \sqrt{3}.$$

2. Заданий гострокутний трикутник PBC, $PB \neq PC$. На сторонах PB та PC вибираються точки A та D відповідно. Точки M, N – середини відрізків BC, AD відповідно. Прямі BC та AD перетинаються у точці O, з точки O проводимо перпендикуляри OE та OF на прямі AB та CD відповідно, точки E, F належать прямим AB, CD відповідно.

   а) Довести, що якщо точки A, B, C, D – циклічні, то $EM \cdot FN = EN \cdot FM$.

   б) З'ясувати, чи завжди точки A, B, C, D – циклічні, якщо виконується рівність $EM \cdot FN = EN \cdot FM$?

   Відповідь: ***б)*** ні.

   Розв'язання. ***а)*** Позначимо Q, R – середини відрізків OB, OC відповідно (рис.1). з властивостей прямокутного трикутника $EQ = \frac{1}{2}OB = RM$, $MQ = \frac{1}{2}OC = RF$.

Далі $\angle EQM = \angle EQO + \angle OQM = 2\angle EBO + \angle OQM$, $\angle MRF = \angle FRO + \angle ORM = 2\angle FCO + \angle ORM$. Якщо $ABCD$ – вписаний, то $\angle EBO = \angle FCO$, $\angle OQM = \angle ORM$, тому $\angle EQM = \angle MRF \Rightarrow \triangle EQM = \triangle MRF$ та $EM = FN$, аналогічно $EN = FN$, тому й $EM \cdot FN = EN \cdot FM$, що й треба було довести.

б) Нехай $OA = 2a, OB = 2b, OC = 2c, OD = 2d, \angle OAB = \alpha, \angle OBC = \beta, \angle ODC = \gamma, \angle OCD = \theta$. Тоді $\cos\angle EQM = \cos(\angle EQO + \angle OQM) = \cos(2\beta + \angle AOB) = -\cos(\alpha - \beta)$. Так маємо

$$EM^2 = EQ^2 + QM^2 - 2EQ \cdot QM \cdot \cos\angle EQM = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha - \beta).$$

Якщо зробити аналогічні обчислення для EN, FN, FM та підставити у задану рівність, одержимо, що $EM \cdot FN = EN \cdot FM \Leftrightarrow (EM \cdot FN)^2 = (EN \cdot FM)^2 \Leftrightarrow$

$$(a^2 + d^2 + 2ad\cos(\alpha - \beta)) \cdot (b^2 + c^2 + 2bc\cos(\gamma - \theta)) =$$

$$= (a^2 + d^2 + 2ad\cos(\gamma - \theta)) \cdot (b^2 + c^2 + 2bc\cos(\alpha - \beta)).$$

Оскільки $\alpha + \beta = \gamma + \theta$, то рівність $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\gamma - \theta)$ справджується тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \gamma$ та $\beta = \theta$, або $\alpha = \theta$ та $\beta = \gamma$ (остання умова означає, що $AB \parallel CD$ – суперечність), $ad - bc = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $AD \parallel BC$, $ac - bd = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли A, B, C, D – циклічні.

Таким чином, коли $AD \parallel BC$ виконується задана рівність $EM \cdot FN = EN \cdot FM$, але точки A, B, C, D не циклічні, бо $PB \neq PC$. Таким чином відповідь у цьому пункті негативна.

3. Доведіть, що $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2008^k$ не ділиться на 19 для будь-якого натурального n.

<u>Розв'язання</u>. Зауважимо, що $(-2008) \equiv 6 \equiv 5^2 \pmod{19}$ Тому

$$2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2008^k \equiv 2\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot (-2008)^k \equiv$$

$$\equiv 2\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 5^{2k} \equiv (1+5)^{2n+1} - (1-5)^{2n+1} \equiv 6^{2n+1} + 4^{2n+1} \equiv$$

$$\equiv 2^{2n+1}(3^{2n+1} + 2^{2n+1}) \pmod{19}.$$

Оскільки $3^{2n+1} + 2^{2n+1} \equiv (-16)^{2n+1} + 2^{2n+1} \equiv 2^{2n+1}(1 - 2^{6n+3}) \pmod{19}$ та $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$, а отже і $2^{6(n+3)+3} \equiv 2^{6n+3} \pmod{19}$, то достатньо перевірити, що $(3^{2n+1} + 2^{2n+1})$ не ділиться на 19 при $n = 1, 2, 3$. Це нескладно зробити безпосередньо: $3^1 + 2^1 \equiv 5 \pmod{19}$, $3^2 + 2^2 \equiv 35 \equiv 16 \pmod{19}$, $3^3 + 2^3 \equiv 275 \equiv 9 \pmod{19}$ – твердження доведене.

4. Доведіть, що число $(x^4y^2 + 1)(y^2 - 1)$, де x, y – натуральні числа, не може бути записане у вигляді $3^m 37^n$, де m та n – деякі натуральні числа.

<u>Розв'язання</u>. Припустимо, що $(x^4y^2+1)(y^2-1) = 3^m 37^n$ для деяких натуральних чисел x, y, m, n. Так як число $x^4y^2 + 1 = (x^2y)^2 + 1$ не ділиться на 3, маємо $(x^4y^2 +$

$1) \vdots 37$. Якщо $(y^2-1) \vdots 37$, то $y^2 \equiv 1 \pmod{37}$, тобто $0 \equiv x^4y^2 \equiv x^4+1 \pmod{37}$, отже $x^4 \equiv -1 \pmod{37}$, з чого випливає $x^{36} \equiv -1 \pmod{37}$ – протиріччя з малою теоремою Ферма. Тому $y^2-1 = 3^m$ та $x^4y^2+1 = 37^n$. З першої рівності випливає, що і $y-1$, і $y+1$ є степенями трійки, тому $y=2$. Залишилося розглянути рівняння $4x^4+1 = 37^n$. Скористуємося модулем 5. Якщо x не ділиться на 5, то ліва частина рівності ділиться на 5 – протиріччя. Тому $2^n \equiv 37^n = 4x^4+1 \equiv 1 \pmod{5}$, що можливо лише при $n \vdots 4$. Отже $n = 4k$ для деякого натурального k і тому $1 = (2x^2 - 37^{2k})(2x^2 + 37^{2k})$, чого не може бути при натуральних x та k.

5. Через деяку точку всередині сфери провели три взаємно перпендикулярні площини. Ці площини вирізають на поверхні сфери 8 криволінійних трикутників. Їх пофарбовано у шаховому порядку у чорний та білий колір. Довести, що рівно половина поверхні сфери пофарбована у чорний колір.

   <u>Розв'язання</u>. Нехай обрана точка P, через яку проведені площини є початком координат системи, площини позначимо E_1, E_2, E_3 – вони координатні площини. Центр сфери позначимо через $M(m_1, m_2, m_3)$, також позначимо образи цих площин при симетрії відносно центра M через E_1', E_2', E_3' відповідно. Коли якась площина проходить через M, то це лише полегшує доведення. Будемо вважати, що $E_i \neq E_i$, $i = 1, 2, 3$. Без обмеження загальності також будемо вважати, що $m_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Далі спростимо координати точок таким чином, будемо вважати координату $x_i = -1$, якщо $x_i < 0$; $x_i = 0$, якщо $0 \leq x_i \leq 2m_i$; $x_i = 1$, якщо $x_i > 2m_i$. Ці 6 площин розбивають увесь простір на 27 частин, поверхню сфери розбивають на 26 частин, оскільки частина з координатами точок $(0, 0, 0)$ лежить повністю всередині сфери. Нехай частина сфери з координатами $(-1, -1, -1)$ пофарбована у чорний колір, тоді за принципом фарбування усі частини, у яких непарна кількість координат $''-1''$ так само пофарбовані у чорний колір. Зараз покажемо відповідність між регіонами різних кольорів, але однакової площею поверхні. $(a, b, c) \leftrightarrow (-a, b, c)$ при $a \neq 0$, $(0, b, c) \leftrightarrow (0, -b, c)$ при $b \neq 0$, $(0, 0, 1) \leftrightarrow (0, 0, -1)$. Вона відновлює повну відповідність між 13 білими та чорними регіонами, тому вони мають однакову площу.

6. Гра проводиться з 2008 невід'ємними цілими числами. Хід складається з вибору деякого цілого b з послідовності, сусідами зліва та справа якого є натуральні числа a і c. Ми замінюємо трійку чисел (a, b, c) на трійку $(a-1, b+7, c-1)$. Неможна вибирати перше чи останнє число послідовності, оскільки вони мають лише по одному сусідові. Якщо не залишилось цілих, у яких обидва сусіди зліва та справа додатні, то хід зробити неможливо, тому гра вважається закінченою. Довести, що гра завжди закінчиться, які б ми не вибирали ходи.

   <u>Розв'язання</u>. Позначимо цю послідовність чисел через $n_1, n_2, \ldots, n_{2008}$. Число n_1 може лише зменшитись на 1, кожного разу, як тільки було обране число n_2 для чергового ходу, тобто в якості числа b. Таким чином ми можемо вибрати в якості $b = n_2$ щонайбільше n_1 раз. Таким чином останній вибір $b = n_2$ або був, або його не було. Ця подія або відбулася, або ні. Якщо це трапилось, то далі ми просто розглядаємо послідовність рухів після цієї події. Якщо це не трапилось, то розглядаємо усі рухи. Таким чином у нашій послідовності ми не обираємо більше жодного разу $b = n_2$, тобто в якості b вибираються члени послідовності від n_3 до n_{2007}. Таким чином у новій послідовності можна вибрати $b = n_3$ скінчену кількість разів, і так далі. Тобто гра обов'язково закінчиться.

Або від супротивного, якщо гра гралася нескінченну кількість разів, то деякі вибори в якості b були зроблені нескінченну кількість разів. Нехай n_k – це найменший зліва номер числа, яке обиралося нескінченну кількість разів. Але тоді число перед ним обиралося скінчену кількість разів, тобто збільшувалось на 7 скінчену кількість разів. Але зменшувалось воно нескінченну кількість разів, тобто воно повинно стати від'ємним, що неможливо. Одержана суперечність завершує доведення.

7. Відомо, що $abc = 1$ для додатних чисел a, b, c. Довести, що справджується нерівність:
$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geq \frac{3}{2}.$$
За яких умов можлива рівність?

<u>Розв'язання</u>. З умов задачі існують такі додатні числа x, y, z, що $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$, то задана нерівність набуває вигляду:
$$\frac{zx}{xy+yz} + \frac{xy}{yz+zx} + \frac{yz}{zx+xy} \geq \frac{3}{2},$$
а це безпосередньо випливає з нерівності Несбіта: для довільних додатних чисел r, s, t справджується нерівність $\frac{r}{s+t} + \frac{s}{t+r} + \frac{t}{r+s} \geq \frac{3}{2}$ і рівність має місце лише за умов $r = s = t$, тому у нас це задає умову $x = y = z$, або остаточно $a = b = c = 1$.

8. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функція, що задовольняє умову для довільних дійсних чисел x, y $|f(x+y) - f(x) - f(y)| < 1$. Доведіть, що $\left|f\left(\frac{x}{2008}\right) - \frac{f(x)}{2008}\right| < 1$.

<u>Розв'язання</u>. Розглянемо принцип скорочення середніх у зворотному напрямі:
$$|f(2008x) - 2008f(x)| = |(f(2008x) - f(2007x) - f(x)) +$$
$$+(f(2007x) - f(2006x) - f(x)) + \ldots + (f(2x) - f(x) - f(x))| =$$
$$= \left|\sum_{k=1}^{2007}(f((k+1)x) - f(kx) - f(x))\right| \leq \sum_{k=1}^{2007}|f((k+1)x) - f(kx) - f(x)| < 2007.$$
Міняючи x на $\frac{x}{2008}$ і ділячи на 2008, отримаємо шукану нерівність:
$$\left|f\left(\frac{x}{2008}\right) - \frac{f(x)}{2008}\right| < \frac{2007}{2008} < 1.$$

Старша ліга

Група Б

Умови та розв'язки

1. На декартовій площині нарисовано графік функції $y = x^2$. Хорда AB цієї параболи паралельна осі абсцис, для кожної точки C, яка лежить на параболі та відмінна від точок A і B знаходимо точку C_1, яка належить колу, що описане навколо трикутника ABC, при цьому хорда кола CC_1 паралельна осі ординат. Знайти ГМТ C_1, коли C пробігає усю параболу, за виключенням точок A і B.

   Відповідь: пряма лінія, яка розташована вище прямої AB на 1 за виключенням чотирьох точок – перетину цієї прямої з параболою, та проекціями точок A і B на цю пряму.

   Розв'язання. Нехай , , x_A, x_B, x_C – абсциси відповідних точок (рис.2). Зрозуміло, що $x_{C_1} = x_C$ та $x_B = -x_A$. Нехай $D = AB \cap CC_1 \Rightarrow DC \cdot DC_1 = DA \cdot DB$. Оскільки $DC = \left|x_B^2 - x_C^2\right|$, $DA = |x_A - x_D| = |x_B + x_C| \Rightarrow DC_1 \cdot \left|x_B^2 - x_C^2\right| = |x_B + x_C| \cdot |x_B - x_C| \Rightarrow$ при умові $x_C \neq \pm x_B$ маємо, що $DC_1 = 1$. Таким чином відповіддю буде пряма лінія, яка розташована вище прямої AB на 1 за виключенням чотирьох точок - перетину цієї прямої з параболою, та проекціями точок A і B на цю пряму.

2. Нехай P – внутрішня точка правильного n-кутника $A_1A_2\ldots A_n$. Пряма PA_i, $i = \overline{1,n}$ другий раз перетинає периметр багатокутника у точці B_i. Довести, що $\sum\limits_{i=1}^{n} PA_i \geq \sum\limits_{i=1}^{n} PB_i$.

   Розв'язання. Позначимо число $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ та нехай $A_{n+j} = A_j$, $j = \overline{1,n}$. Зазначимо, що відстань від будь-якої вершини до точки на стороні багатокутника не більше ніж довжина найбільшої діагоналі d правильного багатокутника. Тому $AP_i + PB_i = A_iB_i \leq d$, крім того $A_iP + PA_{i+k} \geq A_iA_{i+k}$. Якщо тепер останні два типа нерівностей додати по усіх $i = \overline{1,n}$ одержимо: $\sum\limits_{i=1}^{n}(A_iP + PA_{i+k}) \geq nd \geq \sum\limits_{i=1}^{n}(A_iP + PB_i) \Rightarrow 2\sum\limits_{i=1}^{n} A_iP \geq \sum\limits_{i=1}^{n} A_iP + \sum\limits_{i=1}^{n} B_iP$, звідки й випливає потрібна нерівність.

3. Задача № 3 старшої ліги групи А.

4. Нехай $n = (p^2-1)(p^2-4)$. Припускаючи, що p просте число, які найменші можливі значення може приймати сума цифр числа n? Знайти усі прості p, для яких це найменше значення досягається.

   Відповідь: мінімальна сума цифр 9, досягається при $p = 2$ та $p = 5$.

   Розв'язання. Обчислимо знайдемо декілька перших чисел n: $n(2) = 9$, $n(3) = 49$, $n(5) = 513$. Перепишемо число n у вигляді $n = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2) + 9$. Оскільки числа $(p-2), (p-1), p, (p+1), (p+2)$ – послідовні натуральні, то принаймні одне з них кратне 5, зрозуміло, що при $p > 5$ таким буде одне з чисел, що входять у запис числа n. Крім того, добуток $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ кратний 4, тому обов'язково ділиться на 10. Таким чином запис цього числа містить принаймні 2 цифри, остання з яких 9, тобто сума цифр решти чисел такого вигляду більша від 9, тобто шуканий мінімум це число 9, яке досягається при $p = 2$ та $p = 5$.

5. Задача № 5 старшої ліги групи A.

6. Задача № 6 старшої ліги групи A.

7. Показати що, якщо додатні числа a, b, c задовольняють умову $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, то
$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

Розв'язання. З умови $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ випливає, що $ab+bc+ca=abc$, тому $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=a+b+c-1$, з нерівності між середніми
$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=3,$$
звідки одержимо, що $a+b+c \geq 9$, що й остаточно доводить, що $(a-1)(b-1)(c-1)=a+b+c-1 \geq 8$.

8. Задача № 8 старшої ліги групи A.

Середня ліга
Група A
Умови та розв'язки

1. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ рівні сторони $AB=BC$ та $CD=DA$. На сторонах BA та AD відповідно обрані точки E та F таким чином, що точки B, F, E, D – циклічні. Точка P вибрана таким чином, що $\triangle DPE \sim \triangle ADC$ (вони подібні таким чином, що відповідні вершини та порядок їх слідування вказаний точно, тобто $D \leftrightarrow A$, $P \leftrightarrow D$, $E \leftrightarrow C$ і ці вершини проходяться за годинниковою стрілкою або проти неї одночасно у обох трикутниках), так само вибирається і точка Q, що $\triangle BFQ \sim \triangle ABC$ (подібність аналогічна вищеописаній). Довести, що точки A, P, Q – колінеарні.

   Розв'язання. Нехай точка O – центр кола, що описане навколо $BDFE$, тоді $\angle BOF=2\angle BDF=2\angle BDA$ (рис.3). Оскільки $\angle CDA=2\angle BDA$, то трикутники BOF та CDA – рівнобедрені з рівними кутами при вершинах, тому вони подібні, тому $\triangle BOF \sim \triangle EPD$. З вписаного чотирикутника $BEFD$ випливає, що $\triangle BAF \sim \triangle ADE$. Поєднуючи ці факти маємо, що чотирикутники $ABOF$ та $ADPE$ – подібні. Звідси $\angle BAO=\angle DAQ$. Повністю аналогічно одержимо, що $\angle BAO=\angle DAP$, звідки й випливає шукана колінеарність точок.

2. Задача № 2 старшої ліги групи A.

3. На Декартові площині задано n-кутник, у якого усі сторони мають однакову довжину та усі вершини мають раціональні абсциси та ординати. Довести, що n – парне.

   Розв'язання. Нехай (x_i, y_i) – координати вершин багатокутника, $i=\overline{1,n}$, позначимо $A_i=x_{i+1}-x_i$, $b_i=y_{i+1}-y_i$, $i=\overline{1,n}$ $(x_{n+1}=x_1, v_{n+1}=y_1)$. За умовою усі ці значення раціональні, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 0$ та сума $a_i^2 + b_i^2$ не залежить від i. Помножуючи та скорочуючи ці рівності на відповідні множники ми можемо вважати, що $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ та $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$. Нехай $a_i^2 + b_i^2 = c = const \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що c непарне, то у кожній сумі $a_i^2 + b_i^2$ один доданок непарний, інший – парний. Тобто з $2n$ цілих $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ рівно непарних. Тоді $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = 0 \equiv n \pmod 2$, тобто n – парне. Припустимо, що c парне, тоді для кожного i $a_i \equiv b_i \pmod 2$. Якщо a_i, b_i одночасно непарні, то $c = a_i^2 + b_i^2 \equiv 2 \pmod 4$, якщо вони обидва парні, то $c = a_i^2 + b_i^2 \equiv 0 \pmod 4$, тобто одночасно ці випадки неможливі. Тобто усі a_i, b_i або одночасно непарні, або одночасно парні. Останні припущення суперечить побудові цих чисел, які не мають спільного дільника більшого від 1. Тому вони усі непарні, звідси знову маємо, що $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0 \equiv n \pmod 2$, що й завершує доведення.

4. Задача № 4 старшої ліги групи А.

5. Скільки усього існує різних трикутників, у яких сторони цілі числа і периметр дорівнює 2006?

   <u>Відповідь</u>: 83834.

   <u>Розв'язання</u>. Фактично нам треба порахувати кількість таких трійок чисел a, b, c, для яких виконуються умови: $a \ge b \ge c$, $b + c > a$, $a + b + c = 2006$. Звідси легко одержати, що $a < 1003$, а тепер легко організувати перебір з відповідним підрахунком.

   $(1002, 1002, 2), (1002, 1002, 3), \ldots, (1002, 502, 502)$ – 501 трійка;

   $(1001, 1001, 4), (1001, 1000, 5), \ldots, (1001, 503, 502)$ – 499 трійок;

   $(1000, 1000, 6), (1000, 999, 7), \ldots, (1000, 503, 503)$ – 498 трійок;

   $(999, 999, 8), (999, 998, 9), \ldots, (1000, 503, 503)$ – 498 трійок;

   і так далі до останньої трійки (єдиної у відповідному рядку) $(669, 669, 668)$.

   Тепер вже можемо виписати формулу для обчислення їх загальної кількості, бачимо, що починаючи з 500 немає кожного третього доданку, тому загальну кількість легко обчислити за такою схемою: $(1+2+3+\ldots+501)-(2+5+8+\ldots+500) = 83834$, де суми прогресій легко обчислюються.

6. Задача № 6 старшої ліги групи А.

7. Задача № 7 старшої ліги групи А.

8. Послідовність (a_n) визначається наступним чином: $a_0 = -1$, для кожного натурального n $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$. Показати, що всі елементи послідовності, починаючи з a_1, додатні.

Розв'язання. Доведемо це твердження індукцією. Зрозуміло, що $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1} = 0$. При $n = 1$ ця рівність набуває вигляду $\frac{1}{2}a_0 + a_1 = 0$, тобто $a_1 = \frac{1}{2}$. База індукції перевірена.

Припустимо, що для деякого натурального n твердження справджується, тоді $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{n-k+1} = 0$, тоді $0 = (n+2)\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{n-k+2} = (n+2)\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{n-k+2} - (n+1)\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1} = (n+2)a_{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{-ka_k}{(n-k+1)(n-k+2)}$ і $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{ka_k}{(n-k+1)(n-k+2)}$, при цьому коефіцієнт при єдиному від'ємному числу a_0 дорівнює нулеві, звідки й маємо, що $a_{n+1} > 0$. Твердження доведене.

Середня ліга
Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 середньої ліги групи А.

2. Задача № 2 старшої ліги групи Б.

3. ***а)*** Показати що, якщо просте число поділили з остачею на 30, то остача буде або 1, або просте число.

   б) Чи буде те ж саме виконуватись при умові, що число 30 замінити на 60.

   Відповідь: ***б)*** не буде.

   Розв'язання. ***а)*** Нехай це просте число p і $p = 30k + r, 0 \leq r \leq 29$. Зрозуміло, що можемо вважати $p > 30$, бо інакше твердження очевидне.

   Припустимо, що $(r, 30) = d > 1$, тоді $p = (30k + r) \vdots d$, що суперечить простоті числа p. Таким чином це число є взаємно простим з числом 30, а тоді простим перебором легко переконатись, що це лише число 1, або прості числа.

   б) Тут твердження не вірне, що доводить контрприклад: $109 = 60 + 49$, тут число 49 не є простим.

4. Задача № 4 старшої ліги групи Б.

5. У квадратному полі 2009×2009 ланцюг полів зафарбоване у сірий колір, як це показано на рис.4 (показана невелика частина поля, що містить лівий верхній кут). Скільки усього сірих полів на цьому полі?

   Відповідь: 2020049.

   Розв'язання. Порядок, щоб обчислити ці поля оберемо такий. Будемо розглядати послідовно праву та нижню межі квадратів розміру 1×1, 2×2, ..., 2009×2009. Для квадратів з парними номерами сірими є рівно по 1 квадрату, а для квадратів з непарними номерами зафарбована уся права та нижня межа, тобто при розмірі $(2k+1) \times (2k+1)$ пофарбованими є $(4k+1)$ квадрат. Таким чином загалом пофарбовано 1004 квадрати у парних частинах, та $1 + 5 + 9 + \ldots + 4017 = 2019045$ звідси загалом сірих клітин на полі $2019045 + 1004 = 2020049$.

6. Задача № 6 старшої ліги групи А.

7. Задача № 7 старшої ліги групи Б.

8. Задача № 8 середньої ліги групи А.

Молодша ліга
Група А
Умови та розв'язки

1. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник, коло, що описане навколо трикутника ABC перетинає сторони CD та DA у точках P та Q відповідно, а коло, що описане навколо трикутника CDA перетинає сторони AB та BC у точках R та S відповідно. Прямі BP та BQ перетинаються з прямою RS у точках M та N відповідно. Довести, що точки M, N, P, Q – циклічні.

   Розв'язання. Скористаємось рівністю відповідних кутів: $\angle BQC = \angle BAC$ та $\angle CQP = \angle CBP$ (рис.5). З чотирикутника $ACSR$, який вписаний у коло $\angle RSC + \angle RAC = 180^\circ \Rightarrow \angle BSR = 180^\circ - \angle RSC = \angle RAC = \angle BQC$. Тоді далі одержуємо $180^\circ - \angle BMS = \angle SBM + \angle BSM = \angle CBP + \angle BSR = \angle CQP + \angle BQC = \angle BQP = \angle NQP$, що й означає, що чотирикутник $MNQP$ вписаний у коло.

2. Задача № 2 старшої ліги групи Б.

3. Задача № 3 середньої ліги групи А.

4. Задача № 4 старшої ліги групи Б.

5. Задача № 5 середньої ліги групи А.

6. Задача № 6 старшої ліги групи А.

7. Чи існують такі квадратні тричлени $f(x), g(x), h(x)$, що рівняння $f(g(h(x))) = 0$ має рівно 8 коренів $1, 2, \ldots, 8$?

   Відповідь: не існує.

   Розв'язання. Припустимо, що такі квадратні тричлени існують, тоді числа $h(1), h(2), \ldots$ є коренями многочлена четвертого степеня $f(g(x))$, але цей многочлен має максимум 4 корені, тому ці 8 чисел повинні попарно співпадати. Оскільки $h(x)$ – це квадратна парабола, тому його значення симетричні відносно вертикальної осі, що проходить через вісь симетрії, тому повинні виконуватись такі умови: $h(1) = h(8), h(2) = h(7), h(3) = h(5), h(4) = h(5)$, крім того, зрозуміло, що значення $h(1), h(2), h(3), h(4)$ є строго зростаючими або спадними.

   Аналогічно, значення $g(h(1)), g(h(2)), g(h(3)), g(h(4))$ є коренями квадратного тричлена $f(x)$, таким чином з наведеної вище монотонності повинні виконуватись умови $g(h(1)) = g(h(4)), g(h(2)) = g(h(3))$, тобто значення $h(1), h(4)$ та $h(2), h(3)$ є симетричними відносно осі симетрії параболи $g(x)$. Тому виконується рівність: $h(1) + h(4) = h(2) + h(3)$.

   Нехай $h(x) = ax^2 + bx + c$, тоді остання умова запишеться таким чином:

$(a+b+c)+(16a+4b+c)=(4a+2b+c)+(9a+3b+c) \Rightarrow a=0$, що суперечить тому, що $h(x)$ – квадратний тричлен.

8. Два гравці на шахівниці 8×8 грають в таку гру – у кожного з них є фішка, які стоять у протилежних кутах дошки. Вертикаль та горизонталь, на яких стоїть фішка одного з гравців є забороненими для ходу іншого гравця. Кожним своїм ходом гравець повинен пересунути свою фішку у сусідню по стороні клітину, якщо він може це зробити. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє при правильній грі.

   Відповідь: виграє другий гравець.

   Розв'язання. Виграє другий гравець. На початку гри, обидві фішки стоять на чорних полях (без обмеження за загальності ми можемо це вважати). Після ходу першого вони стають на полях різного кольору, тоді другий завжди може зробити хід "назустріч" іншому., тобто зменшити відстань між ними. Дійсно, вони не можуть стояти у одному рядку, тому між ними або по вертикалі, або по діагоналі є принаймні 2 рядки, і він може походити назустріч супротивнику. Навпаки, після ходу другого, коли вони максимально стануть близько один від іншого (просто у сусідніх по діагоналі клітинах) першому доведеться відступати івін буде загнаний у кут, де вже немає куди відступати і у нього не буде ходу.

Молодша ліга
Група Б
Умови та розв'язки

1. Задача № 1 молодшої ліги групи А.

2. Задача № 2 старшої ліги групи Б.

3. Задача № 3 середньої ліги групи Б.

4. Задача № 4 старшої ліги групи Б.

5. Задача № 5 середньої ліги групи Б.

6. Задача № 6 старшої ліги групи А.

7. Задача № 7 молодшої ліги групи А.

8. Задача № 8 молодшої ліги групи А.