Домашнее задание 23.10.14

1 Старое.

1. Вписане коло ω трикутника ABC з центром в I дотикається сторін BC, AC AB в точках A', B' та C'. Пряма $A'I$ вдруге перетинає $B'C'$ в точці M. Доведіть, що пряма AM містить медіану трикутника ABC.

2. Нехай M — довільна внутрішня точка бісектриси AL трикутника ABC. Через точку L проведено довільну пряму, яка перетинає сторону AB в точці P, а продовження сторони AC за точку C — у точці Q. Нехай N — точка перетину прямих BM і PQ, а K — точка перетину прямих CL і MQ. Доведіть, що $\angle NAL = \angle KAL$.

3. Зовнівписане коло ω_C трикутника ABC дотикається сторони AB і продовжень сторін BC і CA в точках M, N і P відповідно, а зовнівписане коло ω_B дотикається сторони AC і продовжень сторін AB і BC в точках S , Q і R відповідно. Нехай $X = MN \cup RS$, $Y = NP \cup RQ$. Доведіть, що точки X, Y і A лежать на одній прямій.

4. Нехай H — точка перетину висот AP і CQ гострокутного трикутника ABC. На медіані BM відмітили точки E і F так, що $\angle APE = \angle BAC$, $\angle CQF = \angle BCA$, причому точка E лежить всередині трикутника APB, а точка F — усередині трикутника CQB. Доведіть, що прямі AE, CF і BH перетинаються в одній точці.

5. Окружности S_1, S_2, S_3 расположены внутри треугольника ABC, касются его сторон и окружности S внешним образом в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

2 Новое

1. Точка O лежить всередині трикутника ABC. Основи перпендикулярів з O на BC, CA, AB — точки D, E, F. перпендикуляри з A та B на EF та FD перетинаються в P. Нехай також H — основа перпендикуляру з P на BA. Доведіть, що точки D, E, F, H лежать на одному колі.

2. Розглянемо ортогональні проекції вершин A, B, C трикутника ABC на бісектриси зовнішніх кутів $\angle ACB, \angle CAB, \angle ABC$. Нехай d — діаметр кола, що описане навколо трикутника з вершинами в основах перпендикулярів, а r та p — радіус вписаного кола та півпериметр трикутника ABC. Доведіть, що $p^2 + r^2 = d^2$.

3. **(Не на счёт.)** Нехай ABC — нерівнобедрений трикутник ($AC \neq BC$) і нехай $A'B'C$ — трикутний, отриманий після деякого повороту відносно C. Нехай M, E, F — середини відрізків BA', AC та CB' відповідно. Знайдіть кут $\angle EMF$, якщо $EM = MF$.