Теорія чисел для чотких пацанів-1

Хілько Данило dkhilko@ukr.net

1. Дано натуральне $n > 1$, яке має k різних простих дільників n. Доведіть, що існує натуральне a, $1 < a < \frac{n}{k} + 1$, таке що $n \mid a^2 - a$.
2. Доведіть, що для довільного натурального d існує безліч натуральних n, для яких $d(n!) - 1$ не є простим числом.
3. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — деяка перестановка натуральних чисел. Доведіть, що існує безліч натуральних i, для яких найбільший спільний дільник чисел a_i, a_{i+1} не більше $\frac{3}{4}i$.
4. Дано натуральне число $a_1 \geq 2$. Для натурального $n \geq 2$ визначимо a_n як найменше з чисел, яке не є взаємно простим з a_{n-1}, але не дорівнює жодному з чисел $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$. Доведіть, що кожне число крім 1 з'явиться в послідовності $\{a_n\}$.
5. P — многочлен з цілими коефіцієнтами, акий що $P(0) = 0$ та
$$\gcd(P(0), P(1), P(2), \ldots) = 1.$$
Доведіть, що існує безліч n, для яких
$$\gcd(P(n) - P(0), P(n+1) - P(1), P(n+2) - P(2), \ldots) = n.$$
6. Нехай n складене натуральне число. Доведіть, що існує натуральне m, яке ділить n, $m \leq \sqrt{n}$, а також $d(n) \leq d^3(m)$, де $d(k)$ — кількість натуральних дільників k.
7. Доведіть, що для всіх n число $n^7 + 7$ не є повним квадратом.
8. Дано два натуральних числа m та n. Доведіть, що знайдеться натуральне k, для якого $2^k - m$ має щонайменше n різни простих дільників.
9. Дано натуральні числа $a > b > 1$, причому b — непарне. Відомо, що $b^n | a^n - 1$, для деякого натурального n. Доведіть, що тоді $a^b > \frac{3^n}{n}$.