ВІДБІРКОВО-ТРЕНУВАЛЬНІ ЗБОРИ КАНДИДАТІВ ДО КОМАНДИ УКРАЇНИ

(м. Дніпропетровськ, 2010 р.)

Цього року за 6 місць у команді України на Міжнародну олімпіаду змагалися за результатами 50-ї Всеукраїнської олімпіади 14 учнів, які приймали участь у змаганні за 11-й клас. Серед них виявилось 4 десятикласники, двоє з яких пробилися в команду України. Як і минулого року уся команда складається з учнів двох міст - Києва та Харкова, але тепер харків'ян стало 4.

I тур

1. Є 2010 карток червоного та 2010 карток білого кольорів. Усі ці 4020 карток перемішуються та роздаються по дві випадковим чином кожному з 2010 гравців, які сидять за круглим столом. Гра складається з декількох раундів, у кожному з яких гравці одночасно передають картки один одному за такими правилами. Якщо гравець володіє принаймні однією червоною карткою, то він передає одну червону картку гравцю, що сидить ліворуч від нього, інакше він передає ліворуч одну білу картку. Гра закінчується після того раунду, коли у кожного з гравців виявляється по одній червоній та білій картці. Визначити максимально можливу кількість таких раундів.

2. (Сердюк Назар) Дано вписаний чотирикутник $ABCD$ в коло з центром O, P – точка перетину діагоналей AC та BD, $BC \nparallel AD$. Промені AB та DC перетинаються в точці E. Коло з центром I, вписане в трикутник EBC дотикається до BC в точці T_1. Коло з центром J, зовнівписане в трикутник EAD дотикається до сторони AD в точці T_2. Прямі IT_1 та JT_2 перетинаються в точці Q. Доведіть, що точки O, P та Q лежать на одній прямій.

3. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для усіх x, y виконується рівність:
$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

II тур

1. (Сенін Віталій) Для невід'ємних чисел a, b, c доведіть нерівність:
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}.$$

2. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається сторін AB та AC в точках Z та Y відповідно. Нехай G точка перетину прямих BY та CZ, а R та S такі точки, що $BCYR$ та $BCSZ$ – паралелограми. Довести, що $GR = GS$.

3. Знайдіть усі пари непарних натуральних чисел a та b, для яких існує натуральне число c таке, що число $\frac{c^n+1}{2^n a+b}$ є цілим для всіх натуральних n.

III тур

1. (Ніколаєнко Станіслав) Позначимо у трикутнику ABC через h довжину висоти, що проведена з вершини A, а через $\alpha = \angle BAC$. Довести, що виконується нерівність $AB + AC \geq BC \cdot \cos\alpha + 2h\sin\alpha$. Чи існують трикутники, для яких ця нерівність обертається у рівність?

2. (Мисак Данило) Розглядатимемо нескінченні послідовності натуральних чисел, у яких кожне натуральне число трапляється рівно один раз. Нехай $\{a_n\}, n \geq 1$ — така послідовність. Назвемо її *послідовною*, якщо для довільного натурального k і кожних натуральних n і m таких, що $a_n < a_m$, справджується також нерівність $a_{kn} < a_{km}$. Наприклад, послідовність $a_n = n$ — послідовна.

   а) Доведіть, що існують послідовні послідовності, відмінні від $a_n = n$.

   б) Чи існують послідовні послідовності, для яких $a_n \neq n, n \geq 2$?

   в) Чи існують послідовні послідовності, для яких $a_n \neq n, n \geq 1$?

3. П'ять однакових дволітрових відер стоять на дворі у вершинах правильного п'ятикутника. Попелюшка та її зла мачуха проводять декілька раундів за такими правилами. На початку кожного раунду мачуха набирає 1 літр брудної води з найближчої калюжі та розподіляє її довільним чином між 5 відрами у дворі. Попелюшка обирає два довільних відра, які стоять поруч (у сусідніх вершинах п'ятикутника), та виливає з них воду у калюжу і ставить порожні відра на місце. Це закінчує черговий раунд. Мачуха прагне зробити так, щоб принаймні у одному відрі вода перелилася через край (тобто після її доливання у ведрі мало бути більше ніж 2 літри води), а Попелюшка – не допустити цього. Чи зможе мачуха досягти свого наміру?

IV тур

1. Натуральне число N називається *збалансованим*, якщо $N = 1$ або N можна представити у вигляді добутку парної кількості простих чисел (необов'язково різних). Для заданих натуральних чисел a та b розглянемо многочлен $P(x) = (x + a)(x + b)$.

   (a) Доведіть, що існують такі різні натуральні числа a та b, що всі числа $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ – збалансовані.

   (b) Доведіть, що зі збалансованості $P(n)$ для всіх натуральних n випливає, що $a = b$.

2. (Ясинський В'ячеслав) Нехай ABC – трикутник, у якому $AB > AC$. Коло ω_a дотикається відрізка BC у точці D, продовження відрізка AB за точку B у точці F, а продовження відрізка AC за точку C у точці E. Промінь AD перетинає вдруге коло ω_a у точці M. Позначимо коло, яке описане навколо трикутника CDM, через ω. Це коло перетинає відрізок DF у точці N. Доведіть, що $FN > ND$.

3. Чи існує натуральне число n, для якого виконується наступне: для довільного раціонального r існує ціле число b та цілі не рівні нулю числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такі, що

$$r = b + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Результати відбору

М	Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Сума
1.	Веклич Богдан	Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер м.Київ	58
2.	Чорний Максим	Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер м.Київ	53
3.	Тєплова Дар'я	Харківський фізико-математичний ліцей №27 Харківської міської ради (учениця 10 класу)	38
4.	Лавинська Тетяна	Харківський фізико-математичний ліцей №27 Харківської міської ради	33
5.	Хрущов Тимур	Харківський фізико-математичний ліцей №27 Харківської міської ради (учень 10 класу)	30
6.	Жениленко Вячеслав	Харківський фізико-математичний ліцей №27 Харківської міської ради	29
7.	Кравченко Олександр	Харківський навчально-виховний комплекс №45 "Академічна гімназія"Харківської міської ради	27
8.	Любінець Володимир	Спеціалізована школа-інтернат "Львівський фізико-математичний ліцей при Львівському національному університеті імені Івана Франка з поглибленим вивченням природничо-математичних наук"	27
9.	Дудкін Олександр	Харківський фізико-математичний ліцей №27 Харківської міської ради	25
10.	Мулярчик Кирило	Фізико-математичний ліцей № 208, м.Київ (учень 10 класу)	24
11.	Габідуліна Надія	Севастопольська гімназія №1 імені О.С.Пушкіна Севастопольської міської Ради	23
12.	Баган Олександр	Природничо-науковий ліцей №145, м.Київ (учень 10 класу)	22
13.	Черненко Іван	Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер м.Київ	12
14.	Голіцин Володимир	Харківський фізико-математичний ліцей №27 Харківської міської ради	10

Журі відбору

РУБЛЬОВ Б.В., професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук (голова журі)

АНІКУШИН А.В., асистент Київського національного університету імені Тараса Шевченка

КРЮКОВА Г.О., аспірант Київського національного університету імені Тараса Шевченка

ЛІШУНОВ В.Г., студент Київського національного університету імені Тараса Шевченка

ПОЛЯКОВ О.В., доцент Дніпропетровського національного університету, кандидат фізико-математичних наук

СКОРОХОДОВ Д.С., аспірант Дніпропетровського національного університету

ТОРБА С.М., науковий співробітник Інституту математики НАН України, кандидат фізико-математичних наук

ВІДБІРКОВО-ТРЕНУВАЛЬНІ ЗБОРИ КАНДИДАТІВ ДО КОМАНДИ УКРАЇНИ

I тур

1. ***Відповідь:*** 2009

Розв'язання 1. Якщо у гравця з'являється або є з самого початку принаймні одна біла картка, то у нього всю гру є хоча б одна біла картка. Таким чином гра завершиться, коли у кожного з гравців буде біла картка.

Будемо гравців позначати за типами карток, які у нього є – КК, БК, ББ. Легко зрозуміти, що кількість гравців типу ББ та КК рівна у кожний момент.

Розглянемо довільного гравця КК, і знайдемо для нього ліворуч найближчого гравця ББ. Тоді кількість переходів від цього ББ до обраного КК назвемо відстанню для КК. Нехай вона дорівнює k, доведемо ММІ, що через щонайбільше k раундів у КК буде біла картка. Для $k = 1$ усе очевидно. Нехай твердження доведене для деякого k. Припустимо, що відстань для деякого КК дорівнює $k+1$. Розглянемо ланцюг від ББ до КК, тут картки передаються зліва направо. На тій частині, що відповідає іншому ланцюгу, який з'єднує наведені КК та ББ, де картки передаються від КК до ББ немає жодного гравця ББ (інакше це була б не найбільша відстань). Таким чином на непоказаному ланцюгу завжди передають червону картки, тому там не з'явиться жодного разу гравець ББ. Таким чином, якщо нові гравці типу ББ з'являються, то лише на тому ланцюгу, який ми розглядаємо.

Таким чином розглядаємо вказаний ланцюг. Якщо гравцю КК передає свою картку інший гравець ББ, то все доведено, бо КК вже одержав білу картку. Інакше, розглянемо сусіда ББ, якому він передає свою картку у першому раунді. Якщо він ББ або БК, то після першого раунду ми маємо найдовшого від нього ББ на відстані k і спрацьовує припущення індукції. Тепер за k раундів у нього з'явиться біла картка, таким чином загалом вийде $k + 1$ раунд. Якщо сусід КК, то ББ і цей КК стають обидва БК (бо ББ передає картку гравець не ББ), звідки ми маємо, що на ланцюжку повинен бути ББ, який ближче до КК ніж на відстані k, і знову спрацьовує припущення індукції.

Але найдовша відстань від КК до ББ може бути 2009, тому відповідь у задачі не перевищую 2009. залишається навести приклад розташування карток між гравцями, щоб це значення досягалося. Це ББ, далі усі гравці зліва направо БК і останній – КК. Легко переконатись, що при такому розташуванні гра триває усі 2009 раундів.

2. ***Розв'язання.*** Позначимо за P_1, P_2 – основи перпендикулярів, опущених з точки P на прямі BC та AD відповідно, M_1, M_2 – середини сторін BC та AD відповідно, T' – точка дотику зовнівписаного кола трикутника EBC до сторони BC. $T'C = BT_1 \Longrightarrow \frac{BT_1}{T_1C} = \frac{CT'}{T'B}$. Точки A, B, C, D лежать на одному колі, отже, $\triangle EBC \sim \triangle EAD \Longrightarrow \frac{BT_1}{T_1C} = \frac{CT'}{T'B} = \frac{AT_2}{T_2D}$. Крім того $\triangle PBC \sim \triangle PAD \Longrightarrow \frac{BP_1}{P_1C} = \frac{AP_2}{P_2D}$. Через те, що M_1, M_2 – середини відрізків BC та AD відповідно маємо: $\frac{T_1M_1}{M_1P_1} = \frac{T_2M_2}{M_2P_2}$. Нехай O_1 – точка на відрізку PQ така, що $\frac{QO_1}{O_1P} = \frac{T_1M_1}{M_1P_1}$. Тоді проекції цієї точки на відрізки BC та AD відповідно співпадають з точками M_1 та $M_2 \Longrightarrow O$ співпадає з O_1. Отже, точки O, P та Q леать на одній прямій, що і треба було довести.

3. ***Відповідь:*** $f(x) = x$ та $f(x) = -x$.

Розв'язання. Простою перевіркою переконуємось, що функції $f(x) = x$ та $f(x) = -x$ є розв'язками заданого функціонального рівняння. Покажемо, що інших розв'язків не існує.

Нехай f задовольняє задане рівняння, очевидно, що ця функція відмінна від сталої. Спочатку покажемо, що $f(0) = 0$. Якщо це не так, то $\forall t$ зробимо підстановку

$(x,y) = \left(0, \frac{t}{f(0)}\right)$ в задане функціональне рівняння і одержимо, що f(0)=f(t), що суперечить умові відмінності функції від сталої. Таким чином $f(0) = 0$. Далі для довільного t зробимо підстановки $(x,y) = (t,0)$ та $(x,y) = (t,-t)$ в задане рівняння, тоді одержимо, що

$$f(tf(t)) = f(0) + t^2 = t^2, \quad f(tf(0)) = 0 = f(-tf(t)) + t^2,$$

відповідно. Звідси ми маємо, що $\forall t$ мають місце рівності

$$f(tf(t)) = t^2, \quad f(-tf(t)) = -t^2.$$

Таким чином для кожного дійсного v, існує дійсне u, для якого має місце рівність $f(u) = v$. Ми також бачимо, що якщо $f(t) = 0$, то $0 = f(tf(t))) = t^2$, звідки $t = 0$, таким чином 0 – єдиний задовольняє умову $f(t) = 0$.

Далі покажемо, що ця функція непарна, тобто для кожного дійсного s $f(-s) = -f(s)$.

Припустимо, що $f(s) < 0$, тоді підберемо таке дійсне число t, для якого $f(s) = -t^2$. Оскільки $t \neq 0$, то $f(t) \neq 0$, тоді ми можемо підібрати таке число a, для якого виконується рівність $af(t) = s$. Підстановка $(x,y) = (t,a)$ у задане рівняння нам дає таку рівність:

$$f(tf(t+a)) = f(af(t)) + t^2 = f(s) + t^2 = 0,$$

звідки випливає, що $tf(t+a) = 0$, тому $t + a = 0$ $\Rightarrow s = -tf(t)$, Звідси остаточно одержимо, що

$$f(-s) = f(tf(t)) = t^2 = -(-t^2) = -f(s),$$

тобто для цього випадку справджується.

Нехай тепер $f(s) > 0$, тоді існує число $t \neq 0$, для якого $f(s) = t^2$, підберемо дійсне число a таким чином, щоб виконувалась рівність $tf(a) = s$. Підстановка $(x,y) = t, a - t)$, у задане рівняння дає

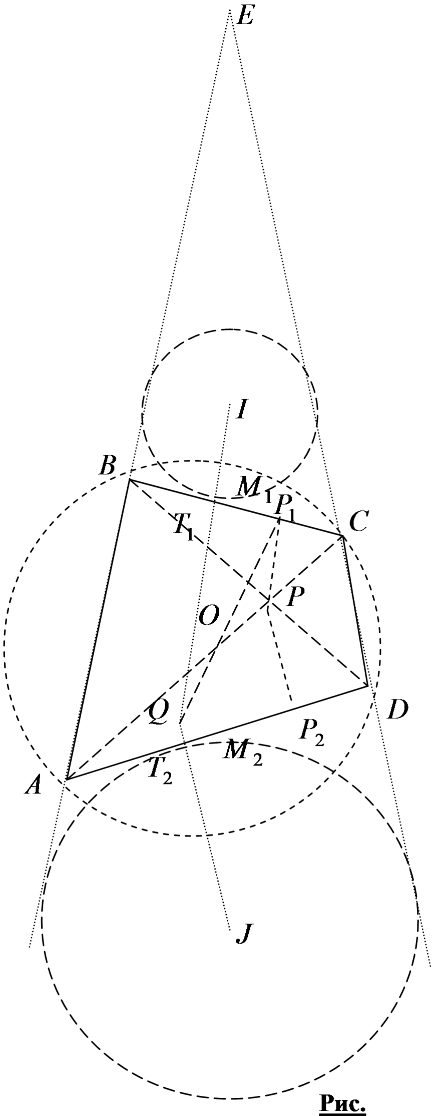

Рис.

$$f(s) = f(tf(a)) = f((a-t)f(t)) + f(s)$$

, звідки $f((a-t)f(t)) = 0 \Rightarrow (a-t)f(t) = 0$. Оскільки $f(t) \neq 0$, ми маємо, що $s = tf(t)$ і також ми бачимо, що виконується рівність

$$f(-s) = f(-tf(t)) = -t^2 = -f(-s)$$

і для цього випадку. Таким чином непарність функції доведена.

Підстановки $(x,y) = (s,t), (x,y) = (t,-s-t)$ та $(x,y) = (-s-t,s)$ у задане рівняння дають такі рівності:

$$f(sf(s+t)) = f(tf(s)) + s^2,$$
$$f(tf(-s)) = f((-s-t)f(t)) + t^2,$$
$$f((-s-t)f(-t)) = f(sf(-s-t)) + (s+t)^2,$$

відповідно. З умови непарності функції можемо друге та третє рівняння подати у іншому вигляді і одержимо, що справджуються такі рівності:

$$f(tf(s)) - f(sf(s+t)) = -s^2,$$

$$f(tf(s)) - f((s+t)f(t)) = -t^2,$$
$$f((s+t)f(t)) + f(sf(s+t)) = (s+t)^2.$$

Додамо ці три рівності і одержимо, що $2f(tf(s)) = 2ts$, або $f(tf(s)) = ts\ \forall t, s$. Зафіксуємо s таким, що $f(s) = 1$, ми одержимо, що має місце для довільного x виконується рівність $f(x) = sx$. Підставляємо це співвідношення у задане функціональне рівняння і одержимо, що можливі значення $s = \pm 1$, що завершує доведення.

II тур

1. ***Розв'язання.*** Нерівність випливає з таких перетворень:

$$5 = 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \cdot \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}} + 2 \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + 2 =$$
$$= \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} + \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} +$$
$$+ \frac{\left(\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb}\right)((ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb))}{ab+bc+ca} =$$
$$= 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\right),$$

що й треба було довести.

2. ***Розв'язання.*** Позначимо для $\triangle ABC$ через k та k_a відповідно вписане та зовнівписане відносно вершини A кола. нехай ці кола k та k_a дотикаються до сторони BC у точках X та T відповідно (рис), зовнівписане коло k_a дотикається до прямих AB та AC у точках P та Q відповідно. Ми використаємо той факт, що точки дотикання вписаного та зовнівписаного кіл до сторони трикутника симетричні відносно середини сторони цього трикутника.

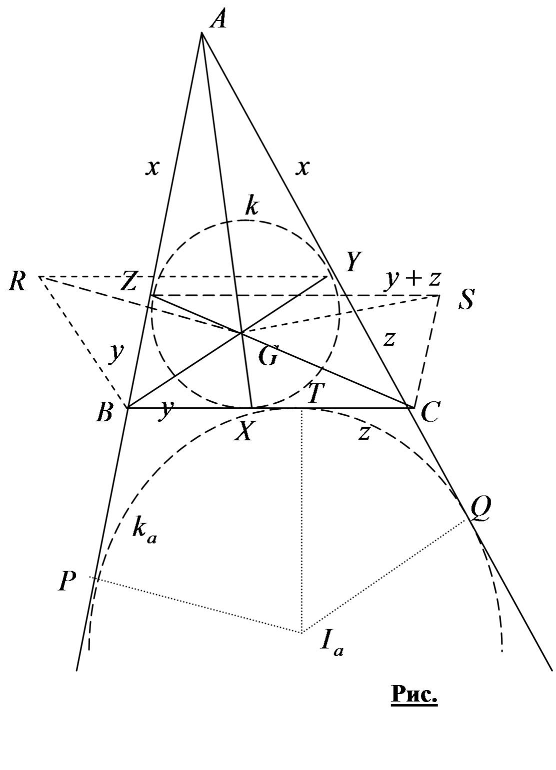

Рис.

Тоді ми маємо такі рівності: $ZP = ZB + BP = XB + BT = BX + CX = ZS$ та $CQ = CT = BX = BZ = CS$. Для кожної з точок Z та C відстані до точки S рівні довжині дотичної до кола k_a, проведеної з цієї точки. Відомо, що всі точки з такою властивістю лежать на прямій ZC, котра є радикальною віссю точки S та кола k_a.

Аналогічними міркуваннями отримуємо, що BY є радикальною віссю точки R та кола k_a. Отже, перетин ZC та BY (точка G за означенням) є радикальним центром R, S та k_a, звідки маємо $GR = GS$.

3. ***Розв'язання.*** Доведемо, що $a+b$ є степенем числа 2. Припустимо протилежне, нехай існує непарне просте число p таке, що $(a+b)\vdots p$. Тоді $2^{p-1}a+b \equiv a+b \equiv 0(\mod p)$, звідки випливає $c^{p-1}+1 \equiv 0(\mod p)$, прийшли до суперечності.

Покажемо, що $b=1$. Для будь-якого непарного дільника p числа $c^{2^m}+1$ виконується $p \equiv 1(\mod 2^{m+1})$. Звідси маємо: $2^{2^m}a+b \equiv 1(\mod 2^{m+1})$, або $b \equiv 1(\mod 2^{m+1})$ для достатньо великого m. Отже, $b=1$.

Якщо $b=1$, то можна показати, що $a=1$ наступним чином. Розглянемо просте p таке, що $p>c+1$. Неважко показати, що будь-який простий дільник q числа c^p+1 або є дільником $c+1$, або задовольняє $q \equiv 1(\mod p)$. Отже,

$$\frac{2^pa+1}{(2^pa+1,c+1)} \equiv 1(\mod p)$$

та $(2^pa+1,c+1) \equiv 2^pa+1 \equiv 2a+1(\mod p)$. За припущенням $(2^pa+1,c+1) \leq c+1 < p$, а оскільки $(2a+1)|(c+1)$, то $2a+1 \leq c+1 < p$. Тобто $(2^pa+1,c+1)=2a+1$ та $(2a+1)|(2^pa+1)$. Розпишемо:

$$2^pa+1=(2a+1)2^{p-1}-2^{p-1}+1$$

Отже, виконується $(2a+1)|(2^{p-1}-1)$. Легко показати (для цього можна використати теорему Діріхле або лему 2), що існує велике просте число q таке, що $(2^{p-1}-1,2^{q-1}-1)=2^2-1=3$. Наприклад, візьмемо будь-яке просте q таке, що $q \equiv 3(\mod p-1)$. Отже, $2a+1=3$ та $a=1$.

Лема 1. Для довільного простого $p>2$ існує нескінчена кількість простих q таких, що $(q-1)$ не ділиться на p.

Доведення Від супротивного. Припустимо, що таких q скінчена кількість. Позначимо їх $q_1,q_2,\ldots,q_n$. Тоді для будь-якого іншого простого q число $q-1$ ділиться на p. Розглянемо число $g=kq_1q_2\ldots q_n+1$. Тоді g має лише дільники виду $pk+1$, а отже, $g \equiv 1(\mod p)$. Нехай $q_1q_2\ldots q_n \equiv s(\mod p)$. Виберемо k так, що $ks \equiv 1(\mod p)$, тоді $q \equiv 2(\mod p)$. Отримане протиріччя доводить твердження леми.

Лема 2. Для довільного простого $p>2$ існують прості числа $q_0,q_1,\ldots,q_n$ більші за p такі, що

$$(2^{p-1}-1,2^{q_0-1}-1,\ldots,2^{q_n-1}-1)=3.$$

Доведення Нехай $p-1=2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$. Тоді за лемою 1 виберемо прості q_i таким чином, що $q_i>p$ та p_i не ділить q_i-1. В такому випадку будемо мати:

$$A=(2^{p-1}-1,2^{q_0-1}-1,\ldots,2^{q_n-1}-1)=2^{(p-1,q_0-1,\ldots,q_n-1)}-1=2^{(2^\alpha,q_0-1)}-1.$$

Залишається взяти просте число q_0 вигляду $4k+3$ і тоді $A=2^{(2^\alpha,q_0-1)}-1=2^2-1=3$.

III тур

1. ***Відповідь:*** Рівність досягається для рівностороннього трикутника.

Розв'язання. Якщо $\alpha \geq 90°$, то $AB+AC>2h \geq 2h\sin\alpha \geq BC\cdot\cos\alpha+2h\sin\alpha$, оскільки $\cos\alpha \leq 0$, тобто виконується строга нерівність.

Нехай тепер $\alpha<90°$, позначимо через H_1,H_2,H_3 – основи висот, що проведені з вершин A,B,C відповідно, K_2 – точка, що симетрична точці H_2 відносно прямої AB, аналогічно точка K_3 – точка, що симетрична точці H_3 відносно прямої AC. Опишемо навколо трикутників ABH_1 та ACH_1 кола ω_1 та ω_2 відповідно (рис.8). Тоді AB і AC – діаметри цих кіл, оскільки $AK_2B=AK_3C=90°$, то $K_2\in\omega_1$ та $K_3\in\omega_2$. Тому $AB \geq K_2H_1$ та AC $\geq K_3H_1$.

Далі за теоремою Птолемея $AB \cdot K_2H_1 = AK_2 \cdot BH_1 + BK_2 \cdot AH_1$. Звідси

$$K_2H_1 = \frac{AK_2 \cdot BH_1}{AB} + \frac{BK_2 \cdot AH_1}{AB} = \frac{AH_2}{AB} \cdot BH_1 + \frac{BH_2}{AB} \cdot AH_1 = BH_1 \cos\alpha + h \sin\alpha.$$

Аналогічно одержимо, що $K_3H_1 = CH_1 \cos\alpha + h \sin\alpha$. Таким чином

$$AB + AC \geq K_2H_1 + K_3H_1 = (BH_1 \cos\alpha + h \sin\alpha) + (CH_1 \cos\alpha + h \sin\alpha) =$$

$$= BC \cos\alpha + 2h \sin\alpha,$$

що й треба було довести.

Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли відрізки K_2H_1 та K_3H_1 є діаметрами відповідно кіл ω_1 та ω_2. У цьому випадку $\angle K_2AH_1 = \angle K_3AH_1 = 90°$. Тоді

$$\angle ABC = 90° - \angle BAH_1 = \angle BAK_2 = \angle BAC = \angle CAK_3 = 90° - \angle CAH_1 = \angle ACB,$$

тобто трикутник ABC – рівносторонній. Перевіркою переконуємось, що дійсно має місце рівність.

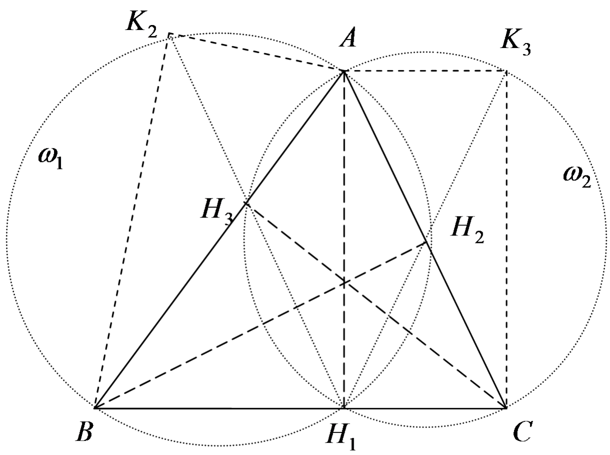

Рис.

2. ***Відповідь:*** Для пункту б) існують, для пункту в) — ні.

Розв'язання. Спершу розв'яжемо пункт а) — покажемо приклад послідовної послідовності, відмінної від тривіальної. Нехай $n = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}\dots p_r^{\alpha_r}$ — канонічне зображення n (в якому степені можуть дорівнювати 0), тоді послідовність $\{a_n\}$, $a_n = 2^{\alpha_2}3^{\alpha_1}5^{\alpha_3}\dots p_r^{\alpha_r}$, задовольняє умову задачі.

Справді, якщо $n = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}\dots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^0p_{r+2}^0\dots$, $m = 2^{\beta_1}3^{\beta_2}5^{\beta_3}\dots p_s^{\beta_s}p_{s+1}^0p_{s+2}^0\dots$, $k = 2^{\gamma_1}3^{\gamma_2}5^{\gamma_3}\dots p_t^{\gamma_t}p_{t+1}^0p_{t+2}^0\dots$ і $a_n < a_m$, то $a_{kn} < a_{km}$, бо

$$a_{kn} = 2^{\alpha_2+\gamma_2}3^{\alpha_1+\gamma_1}5^{\alpha_3+\gamma_3}\dots p_{\max(r,t)}^{\alpha_{\max(r,t)}+\gamma_{\max(r,t)}} = a_ka_n,$$

$$a_{km} = 2^{\beta_2+\gamma_2}3^{\beta_1+\gamma_1}5^{\beta_3+\gamma_3}\dots p_{\max(s,t)}^{\beta_{\max(s,t)}+\gamma_{\max(s,t)}} = a_ka_m$$

і $a_{kn} = a_ka_n < a_ka_m = a_{km}$. Вказана послідовність нетривіальна (наприклад через те, що $a_2 = 3$) та отримується шляхом «переставляння» в канонічному зображенні числа n символів двійки та трійки.

Дещо ускладнимо процедуру побудови послідовності. Покладемо

$$N(k) = \begin{cases} k-2, & \text{якщо } k = 4, 6, 8, \dots, \\ 1, & \text{якщо } k = 2, \\ k+2, & \text{якщо } k = 1, 3, 5, \dots. \end{cases}$$

Тоді $N(k_1) \neq N(k_2)$, якщо $k_1 \neq k_2$. Якщо тепер ми побудуємо послідовність, яка замінюватиме в канонічному зображенні числа n символ p_k на символ $p_{N(k)}$, то отримаємо послідовність, що задовольняє пункт б) задачі. Справді, нехай для $n = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}7^{\alpha_4}\dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}p_r^{\alpha_r}$

$$a_n = 5^{\alpha_1}2^{\alpha_2}11^{\alpha_3}3^{\alpha_4}\dots p_{N(r-1)}^{\alpha_{r-1}}p_{N(r)}^{\alpha_r}.$$

Тоді послідовність $\{a_n\}$ — послідовна, що доводиться так само, як і для першої розглянутої послідовності (нескладно переконатися, що $a_{kn} = a_ka_n$ і $a_{kn} = a_ka_n < a_ka_m =$

a_{km}). До того ж $a_n \neq n$, якщо $n \geq 2$: якби a_n дорівнювало n, то справджувалися б рівності: $\alpha_{N(k)} = \alpha_k, \alpha_{N(N(k))} = \alpha_{N(k)} = \alpha_k, \ldots, \alpha_{N(\ldots N(N(k))\ldots)} = \alpha_k$. А оскільки $N(\ldots N(N(k))\ldots)$ необмежено зростатиме починаючи з якоїсь ітерації, то в разі наявності ненульового α_k в канонічному зображенні n, у ньому мали би бути присутні також ненульові степені як завгодно великих простих чисел, що неможливо.

Нарешті, розв'яжемо пункт в), показавши, що послідовностей, які його задовольняють, не існує. Нехай для деякої послідовної послідовності $a_1 \neq 1$. Згідно з умовою існує таке l, що $a_l = 1$. Тоді $a_l < a_1$ і, домноживши індекси на l, $a_{l^2} < a_l = 1$, що неможливо, оскільки a_{l^2} має бути натуральним числом.

3. ***Відповідь:*** Ні не зможе.

Розв'язання. Попелюшка завжди може вибирати відра таким чином, щоб вони не переповнилися. Позначимо відра послідовно через B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. Попелюшка буде обирати відра у кожному раунді таким чином, щоб виконувались такі три умови.

1. Два суміжні відра, наприклад, B_1, B_2 порожні.

2. Два сусідніх до цієї пари відра, наприклад, B_0, B_3 містять разом максимум 1 літр води.

3. Відро, що залишилось, наприклад, B_4 містить щонайбільше 1 літр води.

Зрозуміло, що ці умови виконуються на початку гри, коли усі відра порожні. Припустимо, що ці умови виконуються на початку r-го раунду ($r \geq 1$). Позначимо кількість брудної води у відрах перед дією мачухи у черговому раунді через $x_i, i = \overline{0,4}$, а після її доливання через $y_i, i = \overline{0,4}$.

За припущенням виконуються такі умови: $x_1 = x_2 = 0$, $x_0 + x_3 \leq 1$, $x_4 \leq 1$. Оскільки мачуха доливає рівно 1 літр води, то виконується умова $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2$. Звідси виконується або умова $y_0 + y_2 \leq 1$, або $y_1 + y_3 \leq 1$. Без обмеження загальності розгляу будемо вважати, що виконується умова $y_1 + y_3 \leq 1$.

Тоді Попелюшка виливає відра B_0 та B_4. Тоді виконуються такі умови: відра B_0 та B_4 – порожні (умова 1 виконана). Внаслідок нерівності $y_1 + y_3 \leq 1$ виконується умова 2. З умови $x_2 = 0$ маємо виконання умови 3, бо $y_2 \leq 1$. Таким чином і по завершення $(r+1)$-раунду виконуються умови 1–3, звідки випливає, що Попелюшка може завжди досягнути того, щоб вони виконувались. А це й означає, що жодне відро ніколи не буде переповненим.

Зауваження. Покажемо, що використання "жадного"алгоритму, тобто, коли Попелюшка завжди виливає два сусідніх відра, у яких на цей момент максимум води може привести до переповнення одного з відер у процесі раундів.

У кожному раунді перед доливанням мачухи відра містять максимум $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq \frac{3}{2}$. Після доливання мачухи $Y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq \frac{5}{2}$. Оскільки Попелюшка виливає максимум можливої води, то вони буде виливати принаймні $\frac{2Y}{5}$, тому залишиться у відрах не більше, ніж $\frac{5}{3} \cdot Y \leq \frac{3}{2}$ літри води.

Мачуха на початку просто робить свої доливання таким чином, щоб у кожному відрі була однакова кількість води, тобто кожне відро буде містити після декількох раундів та відповідного ходу мачухи принаймні по $\frac{1}{2} - 2\epsilon$ літрів води, де ϵ – довільне додатне число. Це стає зрозумілим, якщо обчислити кількість води в усіх відрах після ходу мачухи. Воно задається такими умовами: $c_1 = 1$, $c_{r+1} = 1 + \frac{3}{5} \cdot c_r$, звідки одержимо, що $c_r = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{r-1}$. Тому $\frac{1}{5} c_r \to \frac{1}{2}$.

Далі за "жадним"алгоритмом маємо таку послідовність дій:

$$\left(\tfrac{1}{2} - 2\epsilon, \tfrac{1}{2} - 2\epsilon, \tfrac{1}{2} - 2\epsilon, \tfrac{1}{2} - 2\epsilon, \tfrac{1}{2} - 2\epsilon\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\tfrac{1}{2} - 2\epsilon, \tfrac{1}{2} - 2\epsilon, \tfrac{1}{2} - 2\epsilon, 0, 0\right).$$

Мачуха робить таке відповідне додавання води:

$$\left(0, \tfrac{1}{4}+\epsilon, \epsilon, \tfrac{3}{4}-2\epsilon, 0\right) \longrightarrow (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(\tfrac{1}{2}-2\epsilon, \tfrac{3}{4}-\epsilon, \tfrac{1}{2}-\epsilon, \tfrac{3}{4}-2\epsilon, 0\right).$$

За алгоритмом треба Попелюшці виливати B_1, B_2 і ми одержимо ситуацію

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\tfrac{1}{2}-2\epsilon, 0, 0, \tfrac{3}{4}-2\epsilon, 0\right).$$

Мачуха додає таким чином:

$$\left(\tfrac{5}{8}, 0, 0, \tfrac{3}{8}, 0\right) \longrightarrow (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(\tfrac{9}{8}-2\epsilon, 0, 0, \tfrac{9}{8}-2\epsilon, 0\right).$$

Після виливання двох сусідніх відер, одне з яких порожнє а інше містить $\frac{9}{8}-2\epsilon$ води, залишиться відро, що також містить $\frac{9}{8}-2\epsilon$, тоді мачуха доливає в це відро весь літр води і маємо переповнення, оскільки повинно містити $\frac{17}{8}-2\epsilon > 1$ літрів води.

IV тур

1. ***Розв'язання.*** Розглянемо таку функцію f на множині натуральних чисел, що $f(n) = 0$, якщо n збалансоване, та $f(n) = 1$ – інакше. Тоді $f(nm) \equiv f(n) + f(m) (\mod 2)$ для всіх натуральних n, m.

   а) Для кожного натурального n розглянемо бінарну послідовність $(f(n+1), f(n+2), \ldots, f(n+50))$. Оскільки існує лише 2^{50} різних таких послідовносте, то існує два різних натуральних числа a та b, що

   $$(f(a+1), f(a+2), \ldots, f(a+50)) = (f(b+1), f(b+2), \ldots, f(b+50)).$$

   Але звідси випливає, що для многочлена $P(x) = (x+a)(x+b)$ всі числа $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ – збалансовані, оскільки для всіх $1 \le k \le 50$ виконується $f(P(k)) \equiv f(a+k) + f(b+k) \equiv 2f(a+k) \equiv 0(\mod 2)$.

   b) Припустимо, що $P(n)$ — збалансоване для всіх натуральних n, а $a < b$. Покладемо $n = k(b-a) - a$ для достатньо великого k, такого, щоб число n було додатнім. Тоді $P(n) = k(k+1)(b-a)^2$, а це число може бути збалансованим лише тоді, коли $f(k) = f(k+1)$. Отже, з деякого достатньо великого k послідовність $f(k)$ стала. Але це неможливо, адже для кожного простого p маємо $f(p) = 1$, а для кожного квадрату t^2 виконується $f(t^2) = 0$. Отже, $a = b$.

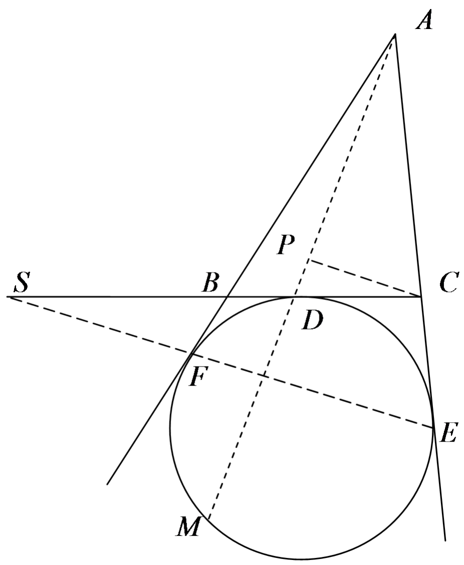

Рис.

2. ***Розв'язання.*** Оскільки $AB > AC$, то прямі BC і EF перетинаються в точці S, яка лежить на продовженні відрізка BC за точку B. Це означає, що пряма, яка проходить через точку C і паралельна до EF, перетинає відрізок AD, а не його продовження.
   Дійсно, так як $AB > AC$, то $\angle ACB > \angle ABC$. А це означає, що $\angle BCE < \angle CBF$.

   Крім того, $\angle AFE = \angle AEF < 90°$, бо $AF = AE$ як дотичні. Отже, додавши останні кутові нерівність та рівність, одержимо: $\angle BCE + \angle CEF < \angle CBF + \angle EFB$. Оскільки сума внутрішніх кутів опуклого чотирикутника дорівнює $360°$, тобто $\angle BCE + \angle CEF + \angle CBF + \angle EFB = 360°$, то $\angle BCE + \angle CEF < 180°$, а це означає, що точка S лежить на продовженні відрізка BC за точку B. Далі, оскільки $CP || EF$ і точки

C і F лежать по різні боки від прямої CM, то точка D лежить між прямими PC і EF. А це означає, що $AP < AD$, тобто точка P — внутрішня точка відрізка AD.

Далі, нехай L — точка перетину прямих CN і EF. Доведемо, що N — середина відрізка CL.

Дійсно, $\angle MEL = \angle MEF = \angle MDF = \angle MDN = \angle MCN = \angle MCL$, тобто $\angle MEL = \angle MCL$.

А це означає, що точки M, E, C, L — циклічні. Звідси випливає, що $\angle LCM = \angle LEM = \alpha$, а $\angle MLC = \angle MET = \beta$ (див. мал.). Позначимо також $\angle CED = \gamma$, а $\angle LED = \delta$. Тоді, очевидно, що $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$. Оскільки CE і CD — дотичні до кола ω_a, то трикутник DCE — рівнобедрений. Тому кути при його основі рівні, тобто $\angle CDE = \angle CED = \gamma$. За теоремою, про кут між дотичною і хордою, маємо: $\angle BDF = \angle DEF = \delta$. Далі, $BD = BF$, як дотичні до кола ω_a, тому $\angle BFD = \angle DEF = \delta$. Оскільки чотирикутник $MNDC$ вписаний в коло ω, то $\angle CMN = \angle NDB = \delta$. З того, що сума внутрішніх кутів трикутника CML дорівнює $180°$ і $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$, випливає, що $\angle LMN = \gamma$.

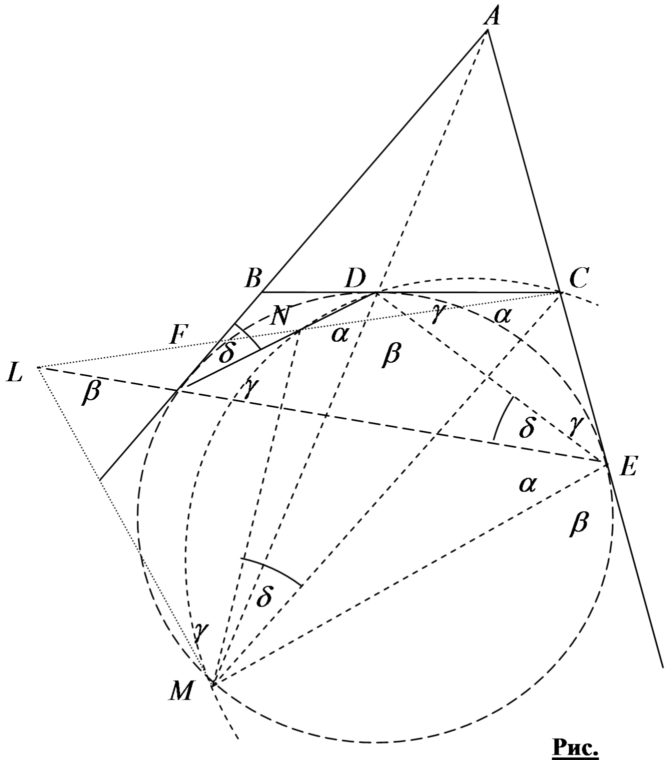

Рис.

Тому з трикутника CML за теоремою синусів одержуємо:

$$\frac{LN}{NC} = \frac{LM}{MC} \cdot \frac{\sin\angle LMD}{\sin\angle DMC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}.$$

Крім того, з трикутника AFD за теоремою синусів: $\frac{AF}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\delta}$, а з трикутника AED за теоремою синусів: $\frac{AE}{AD} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

Оскільки $AF = AE$ як дотичні, то із останніх двох рівностей випливає, що

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = 1.$$

Отже, $\frac{LN}{NC} = 1$, тобто $LN = NC$.

Нехай K – середина BC, а T — точка перетину прямих DF і CP, тоді NK — середня лінія трикутника LCE, тобто $NK||LE$. Оскільки $CP||LE$, то і $NK||CP$. Далі, за теоремою Фалеса, одержуємо, що $FN = NT$, а з того, що точка D — внутрішня точка відрізка NT, випливає, що $ND < NT = FN$, що і треба було довести.

3. ***Відповідь:*** не існує.

Розв'язання. Покажемо, що такого n не існує. Позначимо через A_n множину усіх раціональних чисел r, для яких існує ціле число b та цілі не рівні нулю числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такі, що

$$r = b + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Щоб довести наше твердження, достатньо показати, що для будь-якого n множина A_n не охоплює множини усіх раціональних чисел. Покажемо, що існує пара раціональних чисел p_n, q_n таких, що $p_n < q_n$, а між ними не існує жодного числа з множини A_n. Доведемо методом математичної індукції.

Для $n = 1$ маємо: $p_1 = \frac{1}{3}$ та $q_1 = \frac{1}{2}$. Припустимо, ми для деякого n можемо вибрати таку пару p_n, q_n, що $p_n < q_n$, а між ними не існує жодного числа з множини A_n. Покладемо $d = q_n - p_n$ та $p_{n+1} = p_n + \frac{d}{3}$, $q'_{n+1} = q_n - \frac{d}{3}$. Припустимо, існують цілі числа b та не рівні нулю $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, для яких виконується

$$p_{n+1} < b + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} < q'_{n+1}.$$

За припущенням індукції для кожного $l \in \{1, \ldots, n+1\}$

$$p_n \geq b + \sum_{k=1, k\neq l}^{n+1} \frac{1}{a_k}$$

або

$$b + \sum_{k=1, k\neq l}^{n+1} \frac{1}{a_k} \geq q_n.$$

Якщо виконується перше, то $\frac{1}{a_l} < p_{n+1} - p_n = \frac{d}{3}$, а якщо останнє, то $\frac{1}{a_l} < q'_{n+1} - q_n = -\frac{d}{3}$. Отже, $-\frac{3}{d} < a_l < \frac{3}{d}$, тобто для кожного $l \in \{1, \ldots, n+1\}$ існує лише скінчена кількість можливих значень a_l. Далі, якщо ми зафіксуємо $(a_1, \ldots, a_{n+1})$, то можливі цілі значення b обмежені умовою $p_{n+1} < b + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} < q'_{n+1}$, тобто їх теж лише скінчена кількість. Отже, існує лише скінчена кількість чисел з A_{n+1}, що лежать між p_{n+1} та q'_{n+1}. Серед них оберемо найменше та покладемо q_{n+1} рівним цьому значенню, а якщо таких чисел не знайдеться, то $q_{n+1} = q'_{n+1}$. Очевидно, що для пари p_{n+1}, q_{n+1} твердження індукції виконується. Тоді твердження вірне для всіх натуральних n.