Тренувальні збори для групи резерву.
Геометрія: ще раз степінь точки та радикальні осі

Данило Хілько dkhilko@ukr.net

Травень 2016

1. До кіл ω_1, ω_2 проведено пару спільних зовнішніх дотичних. Перша дотикається ω_1 в A, друга дотикається ω_2 в B. Пряма AB вдруге перетинає ω_1 і ω_2 в C і D відповідно. Доведіть, що $AC = BD$.

2. Всередині гострокутного трикутника ABC взяли точку P і провели висоту AH. Точки D, E, Q — проекції P на AB, AC, AH. Доведіть, що
$$|AB \cdot AD - AC \cdot AE| = BC \cdot PQ.$$

3. Дано гострокутний трикутник ABC. Точки D та E взято на сторонах AC та BC відповідно так, що точки A, B, D, та E лежать на одному колі. Нехай описане коло трикутника DEC перетинає сторону AB в двох точках X та Y. Доведіть, що середина XY є основою перпендикуляру з C на AB.

4. На діаметрі AB кола ω взято точку C. D — така точка на ω, що $DC \perp AB$. Коло з центром в D і радіусом DC перетинає ω в двох точках X і Y. Доведіть, що XY ділить навпіл відрізок CD.

5. Бісектриса кута A прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) претинає описане його коло в N, M — середина AC. Пряма MN вдруге перетинає описане коло ABC в P. Дотичні до описаного кола ABC в A і C перетинаються в S. Доведіть, що $\angle NPS = 90°$.

6. На медіанах AA_0 та BB_0 гострокутного трикутника ABC побудовано дуги однакової градусної міри в сторону вершини C. Доведіть, що спільна хорда кіл, які містять ці дуги, містить точку C.

7. Дано правильний трикутник ABC і коло ω, яке дотикається до AB в точці B, а до AC — в точці C. Пряма, яка проходить через A, перетинає ω в точках D і E. Нехай O — центр ABC. Доведіть, що B, O та середини відрізків CD та CE лежать на одному колі.

8. Вписане коло трикутника ABC дотикається до сторони AB в точці C'. Коло, вписане в трикутник ACC', дотикається сторін AB і AC в точках C_1, B_1; коло, вписане в трикутник BCC', дотикається сторін AB і BC в точках C_2, A_2. Доведіть, що прямі B_1C_1, A_2C_2 і CC' перетинаються в одній точці.

9. Вписане коло трикутника ABC дотикається сторін AB, BC, CA в точках C_0, A_0, B_0. На площині взята точка P. Нехай X — точка перетину прямої AB та серединного перпендикуляру до C_0X. Точки Y, Z визначені аналогічно. Доведіть, що X, Y, Z колінеарні.

10. Дано коло ω і точка P поза ним. З проведено дві дотичні PA і PB до кола ω. M, N — середини відрізків PA і PB. Точки X та Y взяті на відрізку MN довільним чином. Дотичні до ω, що проведено з X і Y перетинаються в Z. Доведіть, що чотирикутник $PXZY$ є *описаним*.

11. На прямій взято точки A, B, C, D саме в такому порядку. На AC і BD побудовано кола ω_1, ω_2 як на діаметрах, які перетинаються в X і Y. XY перетинає AD в Z. На XY взято точку P, що

відрізняється від Z. Пряма BP вдруге перетинає ω_2 в N, пряма CP коло ω_1 — в M. Доведіть, що AM, DN, XY перетинаються в одній точці.

12. Коло ω дотикається до двох паралельних прямих l_1, l_2. Коло ω_1 дотикається до l_1 в A, до ω в C зовнішнім чином. Коло ω_2 дотикається до l_2 в B, до ω в D зовнішнім чином і до ω_1 в E зовнішнім чином. Прямі BC і AD перетинаються в Q. Доведіть, що $QC = QD = QE$.

13. Дано нерівнобоку трапецію $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Коло, яке проходить через точки A та B, перетинає бокові сторони трапеції в точках P, Q, а діагоналі — в точках M і N. Доведіть, що прямі PQ, MN, CD перетинаються в одній точці.

14. В кут вписано два кола ω и Ω. Пряма ℓ перетинає сторони кута в точках A і F, коло ω в точках B і C, коло Ω в точках D і E (порядок точок на прямій — A, B, C, D, E, F. Припустимо, що $BC = DE$. Доведіть, що $AB = EF$.

15. В гострокутному треугольнику ABC O — центр описаного кола, A_1, B_1, C_1 — основи висот. На прямих OA_1, OB_1, OC_1 знайшли такі точки A', B', C' відповідно, що чотирикутники $AOBC'$, $BOCA'$, $COAB'$ вписані. Доведіть, що кола, описані навколо трикутників AA_1A', BB_1B', CC_1C' мають спільну точку.

16. В гострокутному трикутнику ABC проведена висота AH. Точки X та Y на сторонах AB та AC відповідно такі, що $AXHY$ паралелограм. Прямі XY та BC перетинаються в точці D. Доведіть, що $DB \cdot DC = DH^2$.

17. (*)З вершини C трикутника ABC проведено дотичні CX, CY до кола, що проходить через середини сторін трикутника. Доведіть, що прямі XY, AB і дотична в точці C до описаного кола трикутника ABC перетинаються в одній точці.

18. (*)Точка P лежить всередині трикутника ABC. Точки X, Y, Z — основи перпендикулярів, проведених з неї на сторони BC, CA и AB соответственно. Точка P' всередині трикутника ізагонально спряжена до P. Коло ω р центром в тоwws P має радіус $2r$, де r — радsус описаного кола трикутника XYZ. Промені YP' та ZP' перетинають ω в точках M і N. Пряма MN перетинає YZ в точці K. Точка T — проекція K на PA. Доведіть, що

$$PT \cdot PA = 4r^2.$$