Геометрія

Літній математичний табір "Контора π"
Середня група

1 Подібність

Задача 1. *(Нерівність Птолемея) Дано чотирикутник $ABCD$. Доведіть, що*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD,$$

причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $ABCD$ вписаний.

Задача 2. *На сторонах AB і BC квадрата $ABCD$ взято точки P і Q відповідно, причому $BP = BQ$. Нехай H — проекція B на PC. Доведіть, що $\angle QHD = 90°$.*

Задача 3. *Дотична в точці A до описаного кола трикутники ABC перетинае пряму BC в точці M. Точка C' — симетричне відображення точки C відносно прямої AM, точка Y така, що M є серединою відрізка AY. Доведіть, що чотирикутник $YC'AB$ вписаний.*

Задача 4. *Два кола перетинаються в точках A і B, а хорди AN і AM дотикаються до цих кіл. Точка C така, що $AMCN$ є паралелограмом. Точки P і Q ділять відрізки BN і MC в однаковому співвідношенні. Доведіть, що $\angle APQ = \angle ANC$.*

Задача 5. *В трикутнику ABC проведено коло ω_1, що проходить через вершини A і B і дотикається до прямої AC, і коло ω_2, що проходить через вершини A і C і дотикається до прямої AB. Кола ω_1 і ω_2 перетинаються вдруге в точці K. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $\angle BKO = 90°$.*

Задача 6. *В трикутнику ABC ($AB < AC$) відмічено інцентр I, і M — середина BC. Нехай також N — середина дуги BAC описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $\angle INM + \angle AIM = 180°$.*

2 Степінь точки

Степінь точки P відносно кола ω визначається як $OP^2 - R^2$, де O — центр ω, а R — його радіус. Іншим способом степінь точки можна порахувати за допомогою

- теореми про квадрат дотичної,
- теореми про добуток відрізків хорд.

Задача 7. *Дано квадрат $ABCD$. Нехай M — середина BC, а H — основа перпендикуляру з C на DM. Доведіть, що $AB = AH$.*

Задача 8. *Дано прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Дотичні в точках B і C до описаного кола ABC перетинаються в точці S. Нехай M — середина BC, а W — середина меншої дуги AC описаного кола ABC. Пряма WM перетинає описане коло ABC вдруге в точці T. Доведіть, що $\angle WTS = 90°$.*

Задача 9. *Дано правильний трикутник ABC з центром O. Пряма, що проходить через вершину C, перетинає описане коло трикутника ABO в точках D і E. Доведіть, що точки A, O і середини відрізків BD, BE лежать на одному колі.*

Задача 10. *Кола ω_1 і ω_2 дотикаються в точці Q. Їх спільна дотична дотикається до ω_1 в точці B, а A — така точка на цьому колі, що BA — діаметр. Нехай AC — дотична до кола ω_2, причому точки B і C лежать в одній півплощині відносно прямої AQ. Довести, що коло ω_1 ділить BC навпіл.*

3 Радикальні осі

Зафіксуємо два кола (можливо, з нульовим радіусом) на площині. Виявляється, що геометричне місце таких точок з однаковим степенем відносно обох кіл — пряма, перпендикулярна до лінії центрів кіл. Ця пряма — радикальна вісь.

Теорема 1. *Радикальні осі трьох кіл перетинаються в одній точці.*

Теорема 2. *(Бріаншон) Головні діагоналі описаного шестикутника перетинаються в одній точці.*

Вправа 1. *Вкажіть, чим буде радикальна вісь у випадку:*

- *двох кіл, що перетинаються;*
- *двох дотичних кіл;*
- *якщо радіус одного з кіл дорівнює* 0.

Задача 11. *В гострокутному трикутнику* ABC *проведено висоту* AH*. Проекції* H *на сторони* AB *і* AC *— точки* X *і* Y*. Доведіть, що чотирикутник* $BXYC$ *— вписаний.*

Задача 12. *Вписане коло дотикається до сторін* AB, BC, CA *трикутника* ABC *в точках* C_1, A_1, B_1*. Прямі, що містять середні лінії трикутників* B_1AC_1 *і* B_1CA_1*, паралельні відрізкам* B_1C_1 *і* B_1A_1 *відповідно, перетинаються в точці* X*. Доведіть, що* $AX = XC$.

Задача 13. *Нехай* M *і* N *— середини сторін* AB *і* AC *трикутника* ABC*, а* AH *— висота. Доведіть, що спільна хорда описаних кіл трикутників* BHN *і* CHM *проходить через середину* MN*.*