Задача 1.

(1) Пусть $\cos\alpha = m^{-1/2}$. Найти все натуральные m, для которых α/π рационально.

(2) Пусть $\cos\alpha = 2^{-1/4}$. Докажите, что α/π иррационально.

(3) Найти все рациональные $\alpha \in [0,1]$, такие, что $\cos\alpha\pi$ рационально.

Задача 2. Последовательность $a_n, n \geqslant 0$ определена так: $a_0 = 0, a_1 = 1$ и $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Докажите, что 2^k делит a_n тогда и только тогда, когда 2^k делит n.

Задача 3. Числа $d(n,m)$ при $0 \leqslant m \leqslant n$ определены из условий $d(n,0) = d(n,n) = 1, n \geqslant 0$ и $md(n,m) = md(n-1,m) + (2n-m)d(n-1,m-1)$ при $0 < m < n$. Докажите, что все $d(n,m)$ целые.

Задача 4. Пусть T — натуральное число. Последовательность целых чисел $a_n, n \geqslant 1$ определена из равенства $T^n = \sum_{d|n} a_d$. Найти все T, такие, что для всех n: a_n делится на n.

Задача 5. Последовательность $a_n, n \geqslant 1$ определена условиями $a_1 = 2, a_2 = 8$ и $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$. Покажите, что если a_n простое, то n является степенью 3.

Задача 6. Последовательность $a_n, n \geqslant 1$ определена условиями $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 20$ и $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$. Докажите, что $1 + 4a_n a_{n+1}$ точный квадрат при всех n.

Задача 7.

(1) Последовательность $x_n, n \geqslant 1$ определена условиями $x_1 = x_2 = 1$ и $x_{n+2} = (4k-5)x_{n+1} - x_n + 4 - 2k$. Найти все k при которых все члены этой последовательности точные квадраты.

(2) Последовательность $x_n, n \geqslant 0$ определена условиями $x_1 = x_2 = 1$ и $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4$. Докажите, что каждый член этой последовательности x_n является точным квадратом.

Задача 8. Последовательность $a_n, n \geqslant 1$ определена условиями $a_1 = 11^{11}, a_2 = 12^{12}, a_3 = 13^{13}$ и $a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}| + |a_{n-2} - a_{n-3}|$ при $n \geqslant 4$. Найти $a_{14^{14}}$.

Задача 9. Решение записать на отдельном листе и здать мне. Решение должно быть достаточно подробным. Найти все $f : N \to N$, для которых $f(f(f(n))) + 2f(f(n)) + f(n) = 18n + 39$.

Задача 10. Последовательность $x_n, n \geqslant 0$ определена условием $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$ при $n \geqslant 0$. Найти все $x_0 \in [0,1]$, для которых эта последовательность периодична.

Задача 11. Пусть x_1, x_2 — взаимно простые натуральные числа. Определим $x_{n+2} = x_{n+1}x_n + 1$.

(1) Пусть $i > 1$. Докажите, что существует $j > i$, для которого x_i^i делит x_j^j.

(2) Верно ли это для $i = 1$.