Геометрична каша – 1

1. На сторонах BC, AC, AB трикутника ABC взяті точки $A_1,\ B_1,\ C_1$. Доведіть, що якщо точки $A_1,\ B_1,\ C_1$ рухаються так, що трикутники $A_1B_1C_1$ залишаються подібними одному і тому ж трикутнику, то точка перетину описаних кіл трикутників AB_1C, ABC_1, A_1BC не рухається.
2. Три кола S_1, S_2, S_3 попарно дотикаються в трьох різних точках. Доведіть, що прямі, що з`єднують точку дотику $S_1\ S_2$ з двома іншими точками дотику перетинають коло S_3 в діаметрально протилежних точках.
3. Через середину С довільної хорди АВ кола проведено 2 хорди KL та MN (точки K, M по одну сторону від АВ). Відрізки KN та ML перетинають АВ в точках P та Q. Довести $PC = CQ$. (*«Лемма о бабочке»*)
4. На сторонах AB і BC гострокутного трикутника ABC зовнішнім чином побудовано квадрати ABC_1D_1 та A_2BCD_2. Доведіть, що точка перетину прямих AD_2, CD_1 лежить на висоті BH.
5. На прямих AB, BC, CD чотирикутника $ABCD$ взяті точки K, L, M. Прямі KL та AC перетинаються в точці P, LM, BD в точці Q. Доведіть, що точка перетину прямих KQ, MP лежить на AD

6. Протилежні сторони опуклого шестикутника паралельні. Доведіть, що прямі, що з'єднують середини протилежних сторін, перетинаються в одній точці.
7. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. l_a - пряма Сімсона точки A відносно трикутника BCD, прямі l_b, l_c, l_d визначаються аналогічно. Довести що ці прямі перетинаються в одній точці.
8. а) Доведіть, що проекція точки P описаного кола чотирикутника $ABCD$ на прямі Сімсона трикутників BCD, CDA, DAB, BAC лежать на одній прямій (всі прямі розглядаються відносно т P). (*пряма Сімсона чотирикутника*).
   б) Доведіть, що аналогічно можна визначити прямі Сімсона вписаного n-кутника, як пряму , що містить проекції точки P на прямі Сімсона всіх $n-1$-кутників, отриманих відкидуванням однієї з вершин n-кутника.
9. З точки P опущенні перпендикуляри PA_1, PB_1, PC_1 на сторони трикутника ABC. Пряма l_a з'єднує середини відрізків PA, B_1C_1. Аналогічно визначаються l_b, l_c. Доведіть, що ці прямі перетинаються в одній точці.
10. Доведіть, що прямі Ейлера трикутників ABC, HBC, АНС, АВН перетинаються в одній точці, де Н – ортоцентр.
11. Дано трикутник ABC. AA_1, BB_1, CC_1 - його висоти. Довести, що прямі Ейлера трикутників $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ перетинаються в точці P, що належить колу дев»яти точок трикутника ABC, для якої один з відрізків PA, PB, PC рівний сумі двох інших. (*Віктор Тебо*)
12. Доведіть, що описане коло трикутника ABC дотикається до вписаного кола трикутника з вершинами в центрах зовнівписаних кіл трикутника ABC.
13. Нехай P - точка Брокара трикутника ABC (така точка всередині трикутника, що $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$, хто не знає, можете подоводити, що вона існує) . R_1, R_2, R_3 - радіуси описаних кіл трикутників ABP, ACP, BCP. Доведіть, що $R_1R_2R_3 = R^3$, де R - радіус описаного кола трикутника ABC.

14. Нехай A_1, B_1, C_1 - проекції точки Лемуана K на сторони трикутника ABC. Доведіть K - точка перетину медіан трикутника $A_1B_1C_1$.
15. Доведіть, що прямі, які з'єднують середини сторін трикутника з серединами відповідних висот, перетинаються в точці Лемуана.
16. Чотирикутник $ABCD$ - вписаний. Довести, що центри вписаних кіл трикутників утвореними трійкими його вершин утворюють прямокутник.
17. Випуклий чотирикутник розділений діагоналями на 4 трикутника. Доведіть, що пряма, що з'єднує точки перетину медіан пари протилежних трикутників, перпендикулярна прямій, що з'єднує точки перетину висот двох інших трикутників.
18. Прямі AX, BX, CX перетинають описане коло трикутника ABC в точках A_1, B_1, C_1. A_2 - точка симетрична до A_1 відносно середини BC. Точки B_2, C_2 - задаються аналогічно. Довести, що всі кола, описані навколо $A_2B_2C_2$ проходять через одну точку не залежно від вибору точки X.
19. На дузі A_1A_{2n+1} описаного кола S правильного $2n+1$ - кутника $A_1....A_{2n+1}$ взято точку А. Доведіть, що:

    а) $d_1 + d_3 + ... + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + ... + d_{2n}$, де $d_i = AA_i$.

    б) $l_1 + l_3 + ... + l_{2n+1} = l_2 + ... + l_{2n}$, де l_i - довжина дотичної проведеної з точки А до кола радіуса r, що дотикається до S в точці A_i (всі кола дотикаються або внутрішнім чином, або всі зовнішнім).