Відбір міста Києва на Всеукраїнську олімпіаду

І тур

Умови та розв'язки по усіх класах

8 клас

1. Показати, що серед членів послідовності $23n+18$ є нескінченно багато таких, що записуються самими дев'ятками.

Розв'язання. Для позитивної відповіді на це запитання треба показати, що рівняння $23n+18 = 10^k - 1$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах. Перепишемо це рівняння у такому вигляді $n = \frac{10^k - 19}{23}$, тобто повинно існувати нескінченна кількість таких k, що $10^k \equiv 19 \pmod{23}$.

Усього існує скінченна кількість остач при діленні чисел 10^k на 23, то знайдуться такі два числа r, s, для яких $10^r \equiv 10^{r+s} \pmod{23}$, тоді $10^r(10^s - 1) \equiv 0 \pmod{23}$. Оскільки числа 10 та 23 взаємно прості, то $10^s \equiv 1 \pmod{23}$, а далі легко знаходимо, що при $n = sm + 5$ $10^n = 10^{sm+5} = (10^s)^m \cdot 10^5 \equiv 1 \cdot 19 \equiv 19 \pmod{23}$, що й треба було показати.

2. В гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BK та AL. Нехай H – точка перетину висот, а точка M – середина сторони AB. Доведіть, що бісектриса $\angle KML$ проходить через середину відрізка CH.

Розв'язання. Позначимо через S середину відрізка CH. За умовою $\angle ALB = \angle AKB = 90°$, тому точки A, L, K, B лежать на одному колі з діаметром AB, точка M – центр цього кола. Отже $ML = MK$. Також, $\angle HLC = \angle HKC = 90°$, тому точки C, L, H, K лежать на одному колі з діаметром CH, точка S – центр цього кола. Отже $SL = SK$. А значить $\triangle SLM = \triangle SKM$ за трьома сторонами. З рівності трикутників $\angle SML = \angle SMK$, що й означає, що SM – бісектриса $\angle KML$.

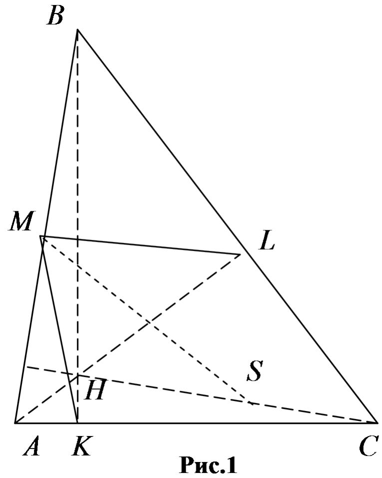

Рис.1

3. У кожній клітині нескінченного клітчатого паперу написане натуральне число таким чином, що кожне натуральне число записане рівно 1 раз. Доведіть, що для кожного натурального m існують дві сусідні по стороні клітини, різниця чисел у яких більша від m (різниця між більшим та меншим числами).

Розв'язання. Розглянемо для довільного натурального числа $m > 1$ квадрат $2m \times 2m$, у цьому квадраті усього $4m^2$ різних натуральних чисел, тому різниця між найбільшим та найменшим числами у цьому квадраті відрізняються принаймні на $4m^2 - 1$. З'єднаємо найбільше та найменше числа у таблиці ланцюгом з клітин, як це показано на рис.5. Довжина цієї доріжки не перевищує $4m - 1$, а тому й хоча б деякі з різниць чисел у сусідніх клітинах цього ланцюга не менше $\frac{4m^2-1}{4m-1}$, тобто більше від m.

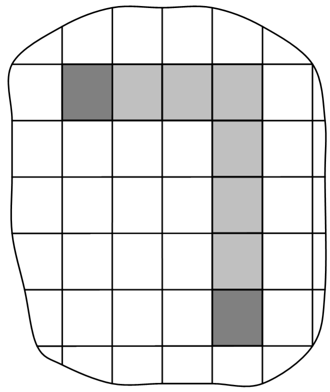
Рис.5

4. Попарно різні дійсні числа a, b, c пов'язані рівністю:

$$a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 4bc + 2ac - 2a + 2c + 2 = 0.$$

З'ясуйте, яке з цих чисел є найбільшим, а яке – найменшим?

Відповідь: $a > b > c$.

Розв'язання. Задане рівняння переписується у вигляді

$$(a-2b+c)^2 = 2(a-c-1).$$

Звідси очевидно, що $a-c-1 \geq 0$ тобто $a > c$.

Тепер у одержаній рівності зробимо заміну $t = a-c-1$, і будемо мати таку рівність: $(a-2b+c)^2 = 2t$.

Спочатку зробимо у ліву частину таку підстановку: $a = t+1+c$. Одержимо таку рівність: $(t+1+2(c-b))^2 = 2t$. Очевидно, що рівність неможлива за умови $c-b > 0$, тому $c < b$.

Аналогічно, після підстановки $c = a-t-1$ одержимо рівність $(t+1+2(b-a))^2 = 2t$, яка так само неможлива при $b-a > 0$, таким чином остаточно одержуємо шукану відповідь.

9 клас

1. Задача 8.1

2. Задача 8.2

3. Дійсні числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 = -1, \\ x_2x_1 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 = -1, \\ x_3x_1 + x_3x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 = -1, \\ x_4x_1 + x_4x_2 + x_4x_3 + x_4x_5 = -1, \\ x_5x_1 + x_5x_2 + x_5x_3 + x_5x_4 = -1. \end{cases}$$

   Знайти які значення може приймати величина x_1?

   Відповідь: $\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Розв'язання. Позначимо $a = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$, тоді будь-яке рівняння можна подати у вигляді (на прикладі першого рівняння): $x_1x_1 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 = -1 + x_1^2$, тобто кожне з цих змінних задовольняє рівняння $x^2 - ax - 1 = 0$. Це рівняння має корені $\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$, які ми позначимо через α та β. З теореми Вієта $\alpha\beta = -1$. Нехай у цій системі рівнянь k із змінних x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 дорівнюють α, а решта $5-k$ дорівнюють β. Тоді $a = k\alpha + (5-k)\beta = k\alpha + \frac{5-k}{\alpha}$. Якщо це підставити у рівняння $\alpha^2 - a\alpha - 1 = 0$ одержимо, що $(k-1)\alpha^2 = 4-k$. Оскільки $\alpha^2 > 0$, то $k = 2$ або $k = 3$. Якщо $k = 2$ маємо $\alpha = \pm\sqrt{2}$, якщо $k = 3$ маємо $\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Легко побачити, що ці значення є шукані.

4. Два автомати виконують перестановки чисел. Якщо у деякий автомат ввести числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2010} (у вказаному порядку), то автомат видає ті ж самі числа, що розташовані у деякому (власному для кожного) автомату порядку, цей порядок залежить лише від номерів чисел, що поступають на вхід, та не залежить від величин самих чисел. У першому випадку спочатку в перший автомат була введена послідовність чисел $1, 2, \ldots, 2010$, одержаний на виході результат був введений у другий автомат.У другому випадку у другий автомат ввели послідовність чисел $2010, 2009, \ldots, 1$, а одержаний на виході результат був введений у перший автомат.

   Доведіть, що кількість чисел, що залишились на своїх місцях внаслідок таких послідовних перетворень у двох автоматах та сама для обох спроб.

   Розв'язання. Позначимо через $1(n)$ та $2(n)$ відповідно місце, куди переставляє число з n-го місця перший та другий автомат.

   Нехай деяке число a_m залишилось на своєму місці, після дії спочатку першого автомату, а потім – другого. Це означає, що перший автомат переставляє його з місця m на деяке місце

$k = 1(m)$, а другий автомат число, яке стоїть на місці k, переставляє на місце $m = 2(k)$. Але це означає, що якщо спочатку подіяти другим автоматом, а далі першим, то число, яке спочатку стоїть на k-ї позиції, спочатку перейде на $m = 2(k)$ місце, а далі після дії першого автомату – на $k = 1(m)$ позицію. Таким чином ми маємо взаємно однозначну відповідність між числами, які зберегли свої позиції у першому та другому випадках. Тому їх кількість рівна.

<u>10 клас</u>

1. Для натурального числа n відомо, що сума усіх дільників цього числа є степенем числа 2. Довести тоді, що й кількість цих дільників також є степенем 2.

   <u>Розв'язання.</u> Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Відомо, що сума усіх дільників цього числа є добуток

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}\right) \ldots \left(1 + p_k + p_k^2 + \ldots + p_k^{\alpha_k}\right).$$

   Якщо цей вираз є степенем 2, то кожний множник також повинен бути степенем 2. Таким чином сума $S_i = 1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{\alpha_i} = 2^l$, при цьому $l > 1$, тому p_i та α_i повинні бути непарними.

   Припустимо, що $\alpha_i > 1$, тоді з а відомими формулами розкладання на множники можемо записати, що $S_i = (1 + p_i)\left(1 + p_i^2 + p_i^4 + \ldots + p_i^{\alpha_i - 1}\right)$. Знову у других дужках повинно бути парне число, а це означає такий вигляд парного числа $\alpha_i - 1 = 4k + 2$, але тоді

$$S_i = (1 + p_i)\left(1 + p_i^2 + p_i^4 + \ldots + p_i^{\alpha_i - 1}\right) = (1 + p_i)(1 + p_i^2)\left(1 + p_i^4 + p_i^8 + \ldots + p_i^{\alpha_i - 3}\right).$$

   Таким чином $1 + p_i = 2^a$ та $1 + p_i^2 = 2^b$, очевидно, що $a < b$, тому $(1 + p_i) \mid (1 + p_i^2)$, що суперечить таким міркуванням: оскільки $(1 + p_i^2) = (1 + p_i)(p_i - 1) + 2$, то $(1 + p_i) \mid 2$, що неможливо для простого числа p_i.

   Таким чином наше припущення щодо $\alpha_i > 1$ – хибне, тому $\forall i = \overline{1, k}\ \alpha_i = 1$, звідки легко одержати, що й кількість дільників дорівнює рівно 2^k, тобто дійсно є степенем 2.

2. Нехай ABC – трикутник, у якого $AB > AC$, AM та AK – медіана та бісектриса цього трикутника. Точка L така на прямій, що $KL \parallel AC$. Довести, що $CL \perp AK$.

   <u>Розв'язання.</u> Опишемо навколо $\triangle ABC$ коло, і продовжимо бісектрису AK до перетину з цим колом у точці D, яка є серединою $\smile BC$. З'єднаємо точки O і D (на цьому відрізку лежить також точка M). Нехай $P = AK \cap CL$. Покажемо, що $\triangle DMK \sim \triangle CPK$, звідки й усе й буде випливати. Для цього достатньо довести, що $\frac{KD}{KC} = \frac{KM}{KP}$.
   Оскільки $AK \cdot KD = BK \cdot KC$, що нам дає $\frac{KD}{KC} = \frac{KB}{KA}$ (рис.2), тобто залишається показати, що $\frac{KM}{KP} = \frac{KB}{KA}$. Застосуємо до $\triangle AMK$ та прямої CL теорему Менелая: $\frac{AP}{PK} \cdot \frac{KC}{CM} \cdot \frac{ML}{LA} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PK} = \frac{MC}{CK} \cdot \frac{AL}{LM}$, з паралельності $KL \parallel CA$ маємо $\frac{AL}{LM} = \frac{CK}{KM}$, звідки $\frac{AP}{PK} = \frac{MC}{KM}$ $\Rightarrow \frac{AP}{PK} + 1 = \frac{MC}{KM} + 1 \Rightarrow \frac{AK}{PK} = \frac{MC + MK}{KM} \Rightarrow \frac{KM}{KP} = \frac{KB}{KA}$, оскільки $BK = CM + MK = BM + MK$, що й треба було довести.

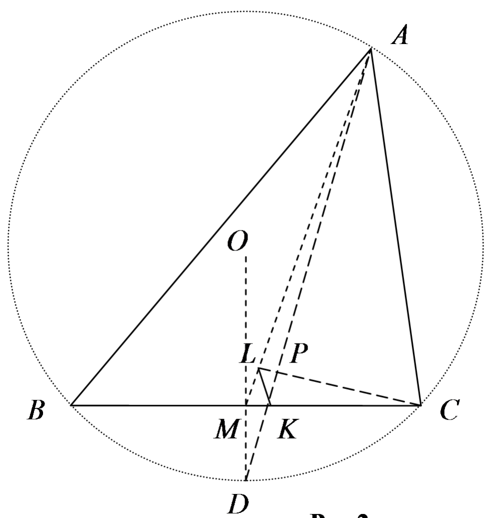

Рис.2

3. Задача 9.3

4. Задача 9.4

<u>11 клас</u>

1. Задача 10.1

2. Задача 10.2

3. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які $\forall x, y \in \mathbb{R}$ задовольняють умову:

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y).$$

   <u>Відповідь:</u> $f = 0$ або $f(x) = x$.

   <u>Розв'язання.</u> Зробимо декілька підстановок: $x = y = 0 \Rightarrow 0 = f^2(0)$.

   Тепер підставимо $y = -1 \Rightarrow xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0$.

   Розглянемо два випадки.

   1 випадок. $f(-1) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} xf(x) = 0 \Rightarrow f = 0$. – розв'язок.

   2 випадок. $f(-1) \neq 0$ тоді у співвідношення $xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0$ підставимо $x = -1$, після скорочення на $f(-1) \Rightarrow f(1) = 1$. Далі туди ж підставимо $x = 1$ і одержимо $f(-1) = -1$. Тому співвідношення $xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0$ приймає вигляд $xf(x) = f(x^2)$.

   Тепер покладемо $y = x - 1$ у початкову рівність і одержимо, $xf(x^2) = xf(x) + f(x^2)f(x-1)$. Підставимо сюди знайдене значення і одержимо, що $f(x^2)(f(x-1) - (x-1)) = 0$. Якщо припустити, що $f(a) = 0$ для деякого $a \neq 0$. Тоді із рівності $xf(x) = f(x^2)$ маємо, що також і $f(a^2) = 0$. Тепер підставимо у початкову рівність $x = a$ і ми одержимо, що $af(a+ay) = 0$. Тобто $f(a+ay) = 0$. Оскільки y довільне при цьому $f(-1) \neq 0$, ми одержимо суперечність, бо $\exists y$: $a + ay = -1$. Таким чином $\forall x \neq 0$ $f(x) \neq 0$, тому $f(x^2) \neq 0$. Але тоді з рівності $f(x^2)(f(x-1) - (x-1)) = 0$ ми маємо, що $f(x-1) = x - 1$ $\forall x \neq 0$ або $f(x) = x$ $\forall x \neq -1$. Оскільки відомо раніше, що $f(-1) = -1$ ми маємо, що другий розв'язок $f(x) = x$.

4. Маємо 10 гаманців з монетами. За один хід дозволяється взяти 9 монет з 9 гаманців (по одній з кожного, при умові, що у кожному з них є принаймні одна монета) та перекласти їх у деясятий гаманець. Або навпаки взяти 9 монет з одного з гаманців (при умові, що у ньому є принаймні 9 монет) та перекласти їх по одній у інші 9 гаманців. Спочатку у гаманцях було відповідно 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 11, 12 та 13 монет.

   Чи можна після скінченної кількості таких перкладань виявитись у кожному з гаманців кілкість монет відмінна від усіх інших гаманців? (Припускається, що у гаманці може бути 0 монет).

   <u>Відповідь:</u> Ні, не може.

   <u>Розв'язання.</u> Нехай $x_i(n)$ – кількість монет у i-му гаманці після n таких перекладань. Легко зрозуміти, що після кожного перекладання для кожних двох гаманців різниця кількості монет у цих гаманцях або не змінюється або змінюється на 10. У будь-якому випадку, різниця монет у двох вибраних гаманцях після кожного ходу має таку саме остачу при ділення на 10, як і до цього ходу. Це можна переписати таким чином:

$$x_i(n) - x_j(n) \equiv x_i(0) - x_j(0) \pmod{10}.$$

   Спочатку ми маємо таку ситуацію: $x_1(0) \equiv x_8(0) \equiv 1 \pmod{10}$, $x_2(0) \equiv x_9(0) \equiv 2 \pmod{10}$, $x_3(0) \equiv x_10(0) \equiv 3 \pmod{10}$, $x_4(0) \equiv x_5(0) \equiv 4 \pmod{10}$, $x_6(0) \equiv x_7(0) \equiv 5 \pmod{10}$. Якщо припустити, що після деякої кількості кроків умова виконана і у кожному гаманці різна кількість монет, але тоді для кожного гаманця буде знайдений інший гаманець, кількість монет у якому відрізняється на кількість монет, яка кратна 10. Таким чином загальна кількість монет повинна бути не меншою від $0 + 10 + 1 + 11 + 2 + 12 + 3 + 13 + 4 + 14 = 70$. Але спочатку кількість монет у гаманцях дорівнює 60. Одержана суперечність завершує доведення.