1 тур

Задача 1.1. Нехай a, b, c – додатні дійсні числа. Доведіть, що

$$\sqrt{2a^2+bc}+\sqrt{2b^2+ac}+\sqrt{2c^2+ab}\geq 3\sqrt{ab+bc+ca}.$$

Задача 1.2. E — точка перетину діагоналей вписаного чотирикутника $ABCD$, F — точка перетину прямих AB і CD, M — середина сторони AB, N — середина сторони CD. Кола, описані навколо трикутників ABE та ACN, вдруге перетинаються в точці K. Доведіть, що точки F, K, M та N лежать на одному колі.

Задача 1.3. Натуральне число n називається досконалим, якщо воно дорівнює сумі всіх своїх натуральних дільників, відмінних від самого n. Наприклад, число 6 – досконале, тому що $6 = 1 + 2 + 3$. Знайдіть всі парні досконалі числа, які можна подати як суму двох кубів натуральних чисел.

2 тур

Задача 2.1. Вписане в рівнобедренний трикутник ABC ($AB = AC$) коло ω дотикається до його сторін AB і AC у точках K і L відповідно. На продовженні сторони BC за точку B обрано довільну точку M. Пряма ML вдруге перетинає ω в точці N, пряма BN вдруге перетинає ω в точці P. На прямій PK відмічено таку точку X, що K лежить між P та X і $KX = KM$. Визначте геометричне місце точок X.

Задача 2.2. В алфавіті племені Муму всього дві літери: М та У. Словом у мові Муму є будь-яка послідовність літер М та У, в якій поряд з кожною літерою М є літера У (наприклад, УУУ та УММУМ є словами, а ММУ ні). Нехай $f(m,u)$ позначає кількість слів мови Муму, в яких є рівно m літер М та рівно u літер У. Доведіть, що

$$f(m,u)-f(2u-m+1,u)=f(m,u-1)-f(2u-m+1,u-1)$$

для будь-яких $u\geq 2, 3\leq m\leq 2u$.

Задача 2.3. Для натурального числа k позначимо через a_n k-ту цифру зліва в десятковому запису числа 2^n ($a_n = 0$, якщо у записі числа 2^n менше k цифр). Розглянемо нескінченний десятковий дріб $\alpha=\overline{0,a_1a_2a_3\ldots}$ Доведіть, що число α ірраціональне.

3 тур

Задача 3.1. Знайдіть усі пари взаємно простих натуральних чисел (x, y), які задовольняють рівність $2(x^3-x)=5(y^3-y)$.

Задача 3.2. Розташування по колу $m\geq 3$ чисел -1 назвемо m-від'ємним (інших чисел на колі немає). На першому кроці відмінник Андрійко вибирає одне з чисел на колі та множить його на -1. Далі на кожному кроці він замість наступного за годинниковою стрілкою числа на колі записує його добуток з числом, записаним на попередньому кроці. Доведіть, що коли для деякого n за k кроків n-від'ємне розташування перетворюється у себе, то за 2^k-1 кроків (2^n-1)-від'ємне розташування також перетворюється у себе.

Задача 3.3. Вписане коло ω трикутника ABC дотикається до його сторін BC, CA і AB в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Нехай S — точка перетину прямих, що проходять через точки B і C паралельно A_1C_1 і A_1B_1 відповідно, A_0 — основа перпендикуляра, проведеного з точки A_1 до B_1C_1, G_1 — центроїд трикутника $A_1B_1C_1$, P — точка перетину променя G_1A_0 з ω. Доведіть, що точки S, A_1 та P лежать на одній прямій.

4 тур

Задача 4.1. Одиничний квадрат розрізано n прямими на частини. Доведіть, що хоча б в одній з цих частин можна повністю розмістити квадрат зі стороною $\frac{1}{n+1}$.

Задача 4.2. Нехай P — многочлен з цілими коефіцієнтами степеня d. Для множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ натуральних чисел позначимо $S(A) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_k)$. Про натуральні числа m, n відомо, що $m^{d+1} \mid n$. Доведіть, що множину $\{1, 2, \ldots, n\}$ можна розбити на m неперетинних підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_m$ з однаковою кількістю елементів так, що $S(A_1) = S(A_2) = \cdots = S(A_m)$.

Задача 4.3. Трійку чисел a, b, c з відрізку $[-1, 1]$ назвемо відбірною, якщо ці числа задовольняють нерівність $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$. Доведіть, що коли трійки a, b, c та x, y, z є відбірними, то ax, by, cz також є відбірною.

Розв'язання

1 тур

Задача 1.1. Піднесши нерівність, яку потрібно довести, до квадрату, одержимо після скорочень еквівалентну нерівність

$$2(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{2a^2+bc}\sqrt{2b^2+ac}+2\sqrt{2a^2+bc}\sqrt{2c^2+ab}+2\sqrt{2b^2+ac}\sqrt{2c^2+ab} \geq 8(ab+bc+ac). \tag{1}$$

Маємо за нерівністю Коші–Буняковського

$$\begin{gathered} a^2+b^2+c^2 = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2} \geq ab+bc+ac, \\ \sqrt{2a^2+bc}\sqrt{2b^2+ac} + \sqrt{2a^2+bc}\sqrt{2c^2+ab} + \sqrt{2b^2+ac}\sqrt{2c^2+ab} = \\ = \sqrt{a^2+a^2+bc}\sqrt{b^2+ac+b^2} + \sqrt{a^2+a^2+bc}\sqrt{c^2+ab+c^2} + \sqrt{b^2+b^2+ac}\sqrt{c^2+ab+c^2} \geq \\ \geq ab + \sqrt{a^3c} + \sqrt{b^3c} + ac + \sqrt{a^3b} + \sqrt{c^3b} + bc + \sqrt{b^3a} + \sqrt{c^3a}. \end{gathered}$$

Далі, за нерівністю Коші

$$\sqrt{a^3b} + \sqrt{b^3a} + \sqrt{b^3c} + \sqrt{c^3b} + \sqrt{a^3c} + \sqrt{c^3a} \leq 2(ab+bc+ca).$$

Неважко бачити, що з наведених нерівностей випливає (1).

Задача 1.2. (Учасник Dave форума dxdy.ru) Помітимо, що точки N, E та K лежать на одній прямій. Справді, за властивістю вписаних кутів $\angle NKA = \angle DCA = \angle DBA = \angle EKA$. Нехай L — точка перетину променя EM з описаним колом ω трикутника ABE. З подібності трикутників ABE та CDE $\angle AME = \angle DNE$, $\angle LEB = \angle NEC = \angle AEK$. Отже, дуги AK і LB

кола ω є рівними, тому $AKLB$ — рівнобічна трапеція. Тоді $\angle AMK = \angle LMB = \angle AME$. Отже, $\angle FMK = \angle FNK$, звідки випливає твердження задачі. *Зауваження.* Легко бачити, що центр описаного навколо чотирикутника $ABCD$ кола також лежить на одному колі з F, K, M, N.

Задача 1.3. Скористаємося відомим твердженням: парне досконале число n записується у вигляді $2^{p-1}(2^p-1)$, де числа p та 2^p-1 є простими. Нехай n задовольняє умову, тобто воно є парним досконалим та подається у вигляді суми двох кубів натуральних чисел. Тоді

$$n = 2^{p-1}(2^p-1) = a^3+b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab).$$

Випадки $p=2$ та $p=3$ перевіримо окремо: число 6 не є сумою двох кубів, а $28 = 1^3+3^3$. Нехай $p \geq 5$, тоді $n \geq 496$. З нерівності між середнім арифметичним та середнім кубічним маємо

$$a+b \leq \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} = \sqrt[3]{4n} = \sqrt[3]{4}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[6]{n}} \leq \sqrt[3]{4}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[6]{296}} < \sqrt{n}.$$

Оскільки 2^p-1 є простим, то воно ділить або $a+b$, або a^2+b^2-ab. Але $2^p-1 > 2^{p-1} = \frac{n}{2^p-1}$, тому $2^p-1 > \sqrt{n}$, отже, $2^p-1 \mid a^2+b^2-ab$. Звідси випливає, що $a+b = 2^m$ для деякого натурального $m \leq p-1$. Нехай $a = a_1 2^x$, $b = b_1 2^y$, де числа x, y є натуральними, а числа a_1, b_1 є непарними. Очевидно, $x = y$, бо інакше 2^m має непарний дільник більше 1. Таким чином, маємо

$$2^{p-1}(2^p-1) = 2^{2x+m}(a_1^2+b_1^2-a_1b_1) = 2^{3x}(a_1+b_1)(a_1^2+b_1^2-a_1b_1).$$

Оскільки число $a_1^2+b_1^2-a_1b_1$ непарне, то $2^{p-1} = a_1^2+b_1^2-a_1b_1$ і $2x+m = p-1$. Тому $a_1+b_1 = 2^{m-x}$, $a_1^2+b_1^2-a_1b_1 = 2^{2x+m+1}-1$. Очевидно, що $a_1^2+b_1^2-a_1b_1 \leq (a_1-b_1)^2-3$. З іншого боку, за нерівністю Коші, $a_1^2+b_1^2-a_1b_1 \geq (a_1+b_1)^2/4$. Тоді $2^{2m-2x-2} \leq 2^{2x+m+1}-1 \leq 2^{2m-2x}-3$, звідки випливає $2x+m+1 = 2m-2x-1$, тобто $p = 2x+m = 6x+3$, що суперечить простоті p.

Відповідь: $28 = 1^3+3^3$.

2 тур

Задача 2.1. (Учасник Dave форума dxdy.ru) Нехай точка D на продовженні LK за точку K така, що $KD = KB$, а точка E на продовженні відрізка CB за точку B така, що $BE = BK$ (тобто $BKDE$ — ромб). Очевидно, що $\angle BMN = \angle NLK = \angle NKB$, тому чотирикутник $BNKM$ є вписаним. Звідси $\angle BKM = \angle BNM = \angle LNP = \angle LKP = \angle DKX$, а отже, $\triangle BKM = \triangle DKX$, тобто точка X симетрична точці M відносно бісектриси KE кута BKD, а тому належить променю DE. З іншого боку, неважко переконатися, що будь-яка точка цього променя, крім точки D, відповідає певній точці M, тобто промінь DE без точки D є шуканим геометричним місцем точок.

Задача 2.2. (Д. Матвєєвський) Для скорочення слово мови Муму назватимемо мусловом. Через $M(m,u)$ та $U(m,u)$ позначимо відповідно кількості муслів, які починаються з літер М та У. Нехай $u \geq 1$, $2 \leq m \leq 2u-1$. Очевидно, що $M(m,u) = U(m-1,u)$. Розглянемо другу літеру муслова, перша літера якого У. Якщо це У, то відкидаючи першу літеру, одержимо довільне муслово, що починається з У. Якщо це М, то відкидаючи перші дві літери, одержимо довільне муслово. Таким чином, $U(m,u) = U(m,u-1) + f(m-1,u-1)$. Отже,

$$\begin{aligned} f(m,u) &= M(m,u)+U(m,u) = U(m-1,u)+U(m,u-1)+f(m-1,u-1) = \\ &= U(m-1,u)+U(m,u-1)+U(m-1,u-1)+M(m-1,u-1) = \\ &= U(m-1,u)+U(m,u-1)+M(m,u-1)+U(m-2,u-1) = \\ &= U(m-1,u)+f(m,u-1)+U(m-2,u-1). \end{aligned}$$

$f(m,u) - f(m,u-1) = U(m-1,u) + U(m-2,u-1)$. Аналогічно, $f(2u-m+1,u) - f(2u-m+1,u-1) = U(2u-m,u) + U(2u-m-1,u-1)$. Таким чином, достатньо довести, що для будь-яких $l \geq 0, 0 \leq k \leq 2l-1$ виконано рівність $U(k,l) = U(2l-k-1,l)$. Для цього розглянемо наступне перетворення муслів: між кожними сусідніми літерами У кількість $a \in \{0,1,2\}$ літер М замінимо на $2-a$. Якщо в кінці слова стоїть літера М, приберемо її, якщо ні – допишемо. (Приміром, слово УММУУУМУМ перетвориться на слово УУММУММУМУ.) Таке перетворення, як неважко бачити, є взаємно-однозначним відображенням між мусловами, що починаються з У та мають k літер М і l літер У, та мусловами, що починаються з У та мають $2l-k-1$ літер М і l літер У. Отже, потрібну нам рівність доведено, а з неї випливає твердження задачі.

Задача 2.3. (Учасник hippie форума dxdy.ru) Скористаємося таким твердженням: якщо натуральне число A не є степенем 10, то для будь-якої скінченної послідовності десяткових цифр знайдеться таке натуральне число p, що десятковий запис A^p починається з цієї послідовності цифр. Дане твердження неважко довести, використовуючи ірраціональність числа $\lg A$.

Міркуючи від супротивного, припустимо, що послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ є t-періодичною, починаючи з номера N. Нехай число $T > N$ кратне t, тоді $a_T = a_{2T} = a_{3T} = \ldots$ Враховуючи, що a_{nT} є k-ю цифрою числа $(2^T)^n$, одержуємо суперечність із наведеним твердженням.

3 тур

Задача 3.1. (В. Ясінський) Позначимо основне рівняння через $(*)$. Очевидно, що пара $(1,1)$ є розв'язком цього рівняння. Припустимо, що $x > 1$, тоді й $y > 1$. Оскільки функція $g(t) = t^3 - t$ додатна та зростає при $t > 1$, то $x > y$, тобто $a = x/y > 1$. Запишемо

$$\frac{x^3}{y^3} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x^2}{y^2} < \frac{x}{y} \cdot \frac{x^2-1}{y^2-1} = \frac{x^3-x}{y^3-y} = \frac{5}{2}.$$

Отже, $a = x/y \in (1, \sqrt[3]{5/2})$. Далі, оскільки числа x та y взаємно прості, то з рівняння $(*)$ випливає, що $x \mid 5(y^2-1)$, $y \mid 2(x^2-1)$. Звідси $xy \mid 10(x^2-1)(y^2-1) = 10(x^2y^2 - (x-y)^2 - 2xy + 1)$, тому $xy \mid 10\left((x-y)^2 - 1\right)$. Припустимо, що $x - y \neq 1$. Тоді $xy \leq 10\left((x-y)^2 - 1\right) < 10(x-y)^2$, звідки $a < 10(a-1)^2$, або $10a^2 - 21a + 10 > 0$. Це неможливо, оскільки функція $h(t) = 10t^2 - 21t + 10$ від'ємна на відрізку $[1, \sqrt[3]{5/2}]$ (це опукла функція, яка набуває від'ємних значень в кінцях відрізку). Отже, $x = y + 1$, звідки, підставляючи у рівняння $(*)$, одразу маємо $x = 4$, $y = 3$.

Відповідь: $(1,1)$, $(4,3)$.

Задача 3.2. (Л. Бартольді) Можна вважати, що Андрійко залишається на місті, а коло рухається за годинниковою стрілкою. Тоді за один крок розташування чисел $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ (Андрійко стоїть біля a_{n-1}) переходить у розташування $(a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}a_{n-1})$.

Розташуванню n чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ по колу зручно співставити многочлен $f_0 + f_1 x + \cdots + f_{n-1}x^{n-1}$, де

$$f_k = \begin{cases} 0, & a_k = 1, \\ 1, & a_k = -1. \end{cases}$$

Через M_n позначимо множину таких многочленів, операції над ними розумітимемо за модулем 2. Неважко бачити, що за один крок многочлен $f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_{n-1}x^{n-1}$ переходить у многочлен $f_{n-1} + f_0 x + f_1 x^2 + \cdots + f_{n-3}x^{n-2} + (f_{n-2} + f_{n-1})x^{n-1} = xf(x) + (1 + x^{n-1} + x^n)f_{n-1}$, тобто в залишок від ділення $xf(x)$ на $1 + x^{n-1} + x^n$. Тоді твердження задачі виглядає так: якщо

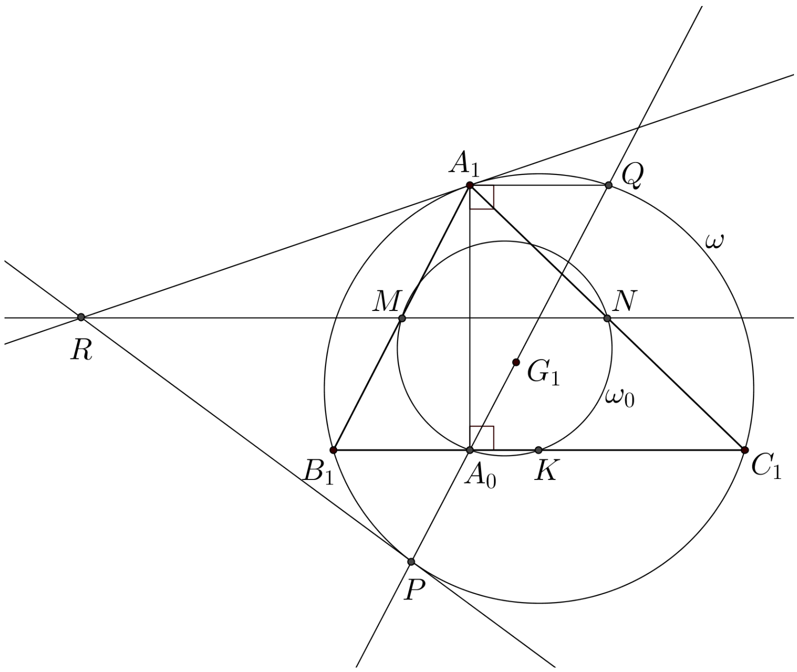
$p_n(x)x^k + p_n(x)$ ділиться на $1 + x^{n-1} + x^n$, то $p_{2^n-1}(x)x^{2^k-1} + p_{2^n-1}(x)$ ділиться на $1 + x^{2^{n-1}} + x^{2^n}$, де $p_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$. (Нагадаємо, що операції виконуються за модулем 2, тому різниця дорівнює сумі.) Оскільки многочлени $1 + x^{n-1} + x^n$ та $p_n(x)$ взаємно прості, то перша умова рівносильна такій: $1 + x^{n-1} + x^n \mid 1 + x^k$. Очевидно, що достатньо довести, що $1 + x^{2^n-1} + x^{2^n} \mid 1 + x^{2^k-1}$ в M_{2^n-1}. Зауважимо, що заміною $x \to 1/x$ умова $1 + x^l = q(x)(1 + x^{m-1} + x^m)$ перетворюється на рівносильну: $1 + x^l = \hat{q}(x)(1 + x + x^m)$, де $\hat{q}(x) = x^{l-m}q(1/x)$. Отже, потрібно довести, що з подільності $1 + x + x^n \mid 1 + x^k$ випливає $1 + x + x^{2^n} \mid 1 + x^{2^k-1}$.

Розглянемо відображення з M_n в M_{2^n-1}:

$$\varphi\colon f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots + f_mx^m \mapsto f_0x^{2^0} + f_1x^{2^1} + f_2x^{2^2} + \cdots + f_mx^{2^m}.$$

Легко бачити, що $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$. Менш очевидним є те, що добуток многочленів переходить в композицію: $\varphi(fg) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$, однак цей факт легко перевірити, використовуючи те, що $(f + g)^2 = f^2 + g^2$ (нагадаємо, що операції виконуються за модулем 2). Звідси маємо, що кратний $x^n + x^{n-1} + 1$ многочлен $h(x) = f(x)(1 + x + x^n)$ переходить у многочлен $\hat{f}(x + x^2 + x^{2^n})$, де $\hat{f} = \varphi(f)$. Оскільки $x \mid \hat{f}(x)$ за означенням відображення φ, то $x + x^2 + x^{2^n} \mid \varphi(h)$. Зокрема, маємо $x + x^2 + x^{2^n} \mid \varphi(1 + x^k) = x + x^{2^k}$, звідки, скорочуючи на x, одержимо $1 + x + x^{2^n-1} \mid 1 + x^{2^k-1}$, що й потрібно довести.

Задача 3.3. (Д. Хілько) Застосуємо полярне перетворення відносно ω. Тоді полярами точок A_1 та P є дотичні до ω у цих точках, а полярою точки S є пряма MN, де M — середина A_1B_1, а N — середина A_1C_1; потрібно довести, що ці поляри перетинаються в одній точці.



Нехай K — середина відрізку A_1C_1, Q — точка перетину променя A_0G_1 з колом ω, R — точка перетину дотичних до ω у точках P та A_1. Розглянемо ω_0 — коло дев'яти точок трикутника $A_1B_1C_1$. Добре відомо, що це коло містить точки M, N, K, A_0 та є гомотетичним колу ω відносно точки G_1 з коефіцієнтом $-1/2$. При такій гомотетії точка A_0 переходить у точку Q, а точка K — в точку A_1. Тому $A_0K \parallel A_1Q$, і $\angle PA_0A_1 = 90^\circ + \angle A_1QP$. З іншого боку, оскільки A_1R та PR є дотичними до кола ω, то $\angle A_1QP = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A_1RP$. Тому $\angle PA_0A_1 = 180 - \frac{1}{2}\angle A_1RP$, звідки з урахуванням рівності $A_1R = PR$ випливає, що точки A_1, A_0 та P лежать на колі з центром в точці R. Отже, R лежить на серединному перпендикулярі до A_1A_0, тобто на MN, що й потрібно довести.

4 тур

Задача 4.1. Журі відбіркових змагань припустилося помилки, оскільки відомий йому розв'язок задачі виявився невірним. Як з'ясувалося, твердження задачі все ж таки є правильним, хоча довести його елементарними методами не вдається, див. статтю [1].

Задача 4.2. (Учасник Dave форума dxdy.ru) Нехай $n = km^{d+1}$. Шукане розбиття побудуємо наступним чином. Щоб визначити, в яку з множин потрапляє число $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, запишемо $x - 1$ у вигляді

$$x - 1 = cm^{d+1} + x_0 + x_1m + x_2m^2 + \ldots + x_dm^d,$$

де $c \geq 0$ — ціле, $x_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, i = 0, 1, \ldots, d$ (тобто запишемо залишок від ділення $x - 1$ на m^{d+1} у системі числення за основою m). Число x віднесемо до множини A_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, якщо $x_0 + x_1 + \cdots + x_d = j \pmod m$. Доведемо, що таке розбиття задовольняє умову задачі. Очевидно, що достатньо довести твердження для многочленів $P(x) = x^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots, d$.

Запишемо

$$S(A_j) = \sum_{c=0}^{k-1} \sum\nolimits^{j} (1 + cm^{d+1} + x_0 + x_1m + x_2m^2 + \ldots + x_dm^d)^t,$$

де $\sum^j$ означає суму за всіма наборами $x_0, \ldots, x_d$ чисел з множини $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, такими що $x_0 + x_1 + \cdots + x_d = j \pmod m$. Доведемо, що внутрішня сума не залежить від j. Позначивши $z = 1 + cm^{d+1}$, перепишемо її, розкривши дужки:

$$\sum\nolimits^{j} (z + x_0 + x_1m + x_2m^2 + \ldots + x_dm^d)^t = \sum\nolimits^{d} \frac{t!}{u!t_0!t_1! \ldots t_d!} z^u m^{t_1+2t_2+\cdots+dt_d} \sum\nolimits^{j} x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_d^{t_d},$$

де $\sum^d$ означає суму за всіма такими наборами невід'ємних цілих чисел $u, t_0, \ldots, t_d$, що $u + t_0 + t_1 + \cdots + t_d = t$. Оскільки $t_0 + t_1 + \cdots + t_d \leq t < d + 1$, то серед чисел $t_0, t_1, \ldots, t_d$ хоча б одне рівне нулю. Нехай для визначеності $t_0 = 0$, тоді

$$\sum\nolimits^{j} x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_d^{t_d} = \sum\nolimits^{j} x_1^{t_1} \cdots x_d^{t_d} = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_d = 0}^{m-1} x_1^{t_1} \cdots x_d^{t_d},$$

адже для довільного набору $x_1, \ldots, x_d$ чисел з множини $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ знайдеться рівно одне число $x_0 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, для якого $x_0 + x_1 + \cdots + x_d = j \pmod m$. Остання сума, очевидно, не залежить від j, що й потрібно довести.

Задача 4.3. (Д. Волошин) Нам дано нерівності

$$\begin{aligned} 1 + 2abc &\geq a^2 + b^2 + c^2, \\ 1 + 2xyz &\geq x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned} \tag{2}$$

а потрібно довести, що

$$1 + 2abcxyz \geq a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2. \tag{3}$$

Одразу помітимо, що можна вважати всі числа невід'ємними. Дійсно, якщо $abcxyz \geq 0$, то при переході до модулів нерівність (3) не змінюється, а нерівності (2) можуть лише посилитися. Якщо ж $abcxyz < 0$, то або $abc < 0$, або $xyz < 0$; без обмеження загальності можна припустити перше, тоді

$$1 + 2abcxyz \geq 1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

Далі, без обмеження загальності можна припустити, що $a \leq b \leq c$. Нерівності (2) та ліва частина (3) не змінюються від перестановки чисел x, y, z. З нерівності для впорядкованих наборів випливає, що права частина (3) є максимальною при $x \leq y \leq z$, отже, достатньо довести твердження лише у цьому випадку.

Розв'язуючи нерівність (3) як квадратну відносно cz, одержуємо рівносильну нерівність

$$abxy - \sqrt{(1-a^2x^2)(1-b^2y^2)} \leq cz \leq abxy + \sqrt{(1-a^2x^2)(1-b^2y^2)}$$

Ліва нерівність є очевидною, оскільки $cz \geq ax \geq abxy$. Доведемо праву нерівність. Розв'язуючи нерівності (2) як квадратні відносно c та z, одержимо

$$\begin{aligned} c &\leq ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}, \\ z &\leq xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}. \end{aligned}$$

Отже, достатньо показати, що

$$\left(ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right) \leq abxy + \sqrt{(1-a^2x^2)(1-b^2y^2)}. \tag{4}$$

Припустимо, що якесь з чисел a, b, x, y дорівнює 1. З урахуванням того, що $a \leq b$ та $x \leq y$, достатньо розглянути випадок $b = 1$ (випадок $y = 1$ є аналогічним). Нерівність (4) перетворюється на

$$ab\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leq \sqrt{(1-a^2x^2)(1-y^2)},$$

яка є очевидною, оскільки $ab \leq 1$, $1 - a^2x^2 \geq 1 - x^2$.

Припустимо тепер, що жодне з цих чисел не дорівнює 1. Розкривши дужки в лівій частині і розділивши на $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)(1-x^2)(1-y^2)}$, одержимо після простих перетворень рівносильну нерівність

$$1 + AB + XY \leq \sqrt{(1 + A^2 + X^2)(1 + B^2 + Y^2)},$$

де

$$A = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \quad B = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}, \quad X = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}};$$

остання нерівність є частковим випадком нерівності Коші–Буняковського.

Література

[1] Ball, K. The plank problem for symmetric bodies // Inventiones Mathematicae. — 1991. — Vol. 104, no. 1. — P. 535-543. arXiv:math/9201218.