Подібні трикутники - 1

Літній математичний табір "Контора π"
Середня група

Задача 1. *(Нерівність Птолемея) Дано чотирикутник $ABCD$. Доведіть, що*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD,$$

причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $ABCD$ вписаний.

Задача 2. *Коло ω перетинає сторони BA і BC трикутника ABC в точках C_1 і A_1 відповідно. Описані кола трикутників BA_1C_1 і ABC вдруге перетинаються в точці K. Нехай O — центр ω. Доведіть, що $\angle BKO = 90°$.*

Задача 3. *(Симедіана) В кут з вершиною A вписано коло, що дотикається сторін кута в точках B і C. Пряма, проведена через A, перетинає коло в точках D і E. Хорда BX паралельна прямій DE. Доведіть, що пряма XC проходить через середину DE.*

Задача 4. *На сторонах AB і BC квадрата $ABCD$ взято точки P і Q відповідно, причому $BP = BQ$. Нехай H — проекція B на PC. Доведіть, що $\angle QHC = 90°$.*

Задача 5. *Два кола перетинаються в точках A і B, а хорди AN і AM дотикаються до цих кіл. Точка C така, що $AMCN$ є паралелограмом. Точки P і Q ділять відрізки BN і MC в однаковому співвідношенні. Доведіть, що $\angle APQ = \angle ANC$.*

Хілько Данило
dkhilko@ukr.net

Додаткові побудови - 1

Літній математичний табір "Контора π"
Молодша група

Упражнение 1. *Дві сторони трикутника рівні 8 і 6, а довжина медіани, що проводять до третьої сторони, рівна 5. Знайдіть кут між сторонами 6 і 8.*

Упражнение 2. *Дано трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$) з прямими кутами A і B. Нехай M — середина сторони CD. Доведіть, що $MA = MB$.*

Задача 1. *Дано коло ω і точка P зовні кола. Нехай PA і PB — дотичні до кола ω, а січна, що проходить через P, перетинає ω в D і E. Доведіть, що DE містить бісектрису кута $\angle AMB$, де M — середина DE.*

Задача 2. *Нехай P — точка на меншій дузі BC описаного кола правильного трикутника ABC. Доведіть, що $AP = PB + PC$.*

Задача 3. *В випуклому чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$, $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Доведіть, що $\angle BAD = \angle BCD$.*

Задача 4. *Дано прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AC і кутом $\angle A = 50°$. Точки K і L на катеті BC такі, що $\angle KAC = \angle LAB = 10°$. Доведіть, що $CK = 2BL$.*

Хілько Данило
dkhilko@ukr.net