В этом домашнем задании задачи на реккурентно заданные последовательности.

Сначала несколько функциональных уравнений. Подумайте, как для их решения использовать линейные реккурентные последовательности. Далее N — множество натуральных чисел и $N_0 = N \cup \{0\}$.

Задача 1. Найти все $f : N \to N$ такие, что $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$.

Задача 2. Найти все $f : N \to N$ такие, что $f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$.

Задача 3. Найти все $f : N \to N$ такие, что $f^{(19)}(n) + 97f(n) = 98n + 232$.

Задача 4. Найти все $f : N \to N$ такие, что $f(f(f(n)))+6f(n) = 3f(f(n))+4n+2001$.

Задача 5. Найти все $f : N_0 \to N_0$ такие, что $f(f(n)) + f(n) = 2n + 6$.

Задача 6. Найти все $f : N \to N$ такие, что для всякого n величина $f(f(n)) + f(n)$ равна $2n + 2001$ или $2n + 2002$.

Далее несколько задач о дискретных гармонических функциях.

Задача 7. На бесконечном клетчатом листке бумаги проведена горизонтальная прямая вдоль линии сетки. Можно ли расставить в клетках верхней полуплоскости действительные числа, по модулю не превосходящие единицы, так, чтобы выполнялись 2 условия:

(1) В каждом (бесконечном) столбце все числа различны.
(2) число, стоящее в любой клетке, не лежащей на границе полуплоскости, равно среднему арифметическому четырёх своих соседей.

А можно ли расставить числа так, чтобы вместо условия 1 было выполнено более сильное: каждое число встречается не более двух раз ?

Задача 8. Функция $f : Z^2 \to R$ называется дискретной гармонической функцией, если для всех $(x, y) \in Z^2$ выполнено $4f(x, y) = f(x, y + 1) + f(x, y - 1) + f(x - 1, y) + f(x + 1, y)$. Проверьте, что функции $(ax + b)(cy + d), x^2 - y^2$ гармоничны. Докажите теорему Лиувилля: если гармоническая функция ограничена (т.е. $|f(x, y)| \leqslant K$), то она постоянна.

Задача 9. Существует ли ненулевой многочлен $P(x, y)$ такой, что $f(x, y) = (x^2 + y^2)P(x, y)$ будет гармонической на Z^2 ?

Следующие задачи о последовательностях в теории чисел.

Задача 10. Последовательность $a_n, n \geqslant 0$ задана так: $a_0 = 39, a_1 = 45$ и $a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_n$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n для которых a_n делится на 1986.

Задача 11. Последовательность $a_n, n \geqslant 0$ определена равенством $a_n = 2^n+3^n+7^n+42^n - 1$. Найти все простые p для которых существует бесконечно много натуральных n таких, что a_n делится на p.

Задача 12. Пусть m — фиксированное натуральное число. Последовательность $x_n, n \geqslant 0$ определена так: $x_k = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ и $x_{k+m} = x_{k+m-1} + x_{k+m-2} + \ldots + x_k$ при $k \geqslant 0$ (т.е. каждый следующий является суммой m предыдущих). Докажите, что для каждого натурального d в последовательности x_n найдутся $m - 1$ последовательных членов, делящихся на d.