Геометрия. Подобие и вписанные четырёхугольники

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Задача 1. *В треугольнике ABC, в котором $AB = BC$, на стороне AB выбрана точка D. Касательная к описанной окружности треугольника ADC в точке D пересекает описанную окружность треугольника BDC во второй раз в точке M. Доказать, что $BM \parallel AC$.*

Задача 2. *Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X, Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, то прямые XY и A_1B_1 перпендикулярны.*

Задача 3. *Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B, K — произвольная точка на меньшей из двух дуг AB этой окружности. На прямой OB взята точка L такая, что прямые OA и KL параллельны. Пусть M — точка пересечения описанной окружности ω треугольника KLB с прямой AK, которая отличается от K. Докажите, что прямая OM касается ω.*

Задача 4. *На стороне BC фиксированного треугольника ABC выбрана произвольная точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами K и L соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BKD и CLD вторично пересекаются на фиксированной окружности.*

Задача 5. *В треугольнике ABC AA_1 и BB_1 — высоты. На стороне AB выбрали точки M и K так, что $B_1K \parallel BC$ и $A_1M \parallel AC$. Докажите, что $\angle AA_1K = \angle BB_1M$.*

Задача 6. *В трапеции $ABCD$ $AB = BC = CD$, CH — высота. Докажите, что перпендикуляр, проведенный из H на AC, проходит через середину BD.*

Задача 7. *Пусть M — середина стороны BC неравнобедренного треугольника ABC, а точка O — центр его описанной окружности. Пусть P, Q — проекции M на AB и AC соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через M и середину отрезка PQ параллельна AO.*

Задача 8. *Высоты AA_1, CC_1 пересекаются в точке H. Точка Q симметрична середине стороны AC относительно AA_1; точка P — середина A_1C_1. Докажите, что $\angle QPH = 90°$.*

Задача 9. *Высоты AA_1, CC_1 пересекаются в точке H. Пусть M — середина AC, а N — середина A_1C_1. Докажите, что описанная окружность NHM касается BH.*

Задача 10. *Дано квадрат $ABCD$ и точки P, Q на сторонах AB и BC соответственно такие, что $BP = BQ$. Точка H — проекция B на PC. Докажите, что $\angle DHQ = 90°$.*

Задача 11. *Пусть I — инцентр треугольника ABC ($AB < AC$), M — середина BC, а N — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\angle ANI = \angle IMB$.*

Задача 12. *В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. Докажите, что отрезок XC проходит через середину отрезка DE.*