Геометрія чисел

Теорема 1 (Мінковський). *Нехай обмежена та опукла множина* $C \subseteq \mathbb{R}^d$ *симетрична відносно* 0 *та* $\mathrm{vol}(C) > 2^d$. *Тоді* C *містить ненульову цілочисельну точку. Тобто*

$$C \cap \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \neq \varnothing.$$

Задача 1. Нехай K — круг з центром в початку координат і радіусом 13 м. В кожній цілочисельній точці, окрім нуля, росте дерево діаметром 0.16 м. Ви знаходитеся в центрі кола. Доведіть, що ви не зможете побачити нічого поза лісом.

Задача 2 (Теорема Діріхле)**.** Нехай $\alpha \in (0, 1)$ і $N \in \mathbb{N}$. Тоді існують $m, n \in \mathbb{N}$ такі, що $n \leqslant N$ і

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nN}.$$

Означення 1. Послідовність Фарея $\mathcal{F}_n$ порядку n є зростаюча послідовність нескоротних раціональних дробів $\frac{p}{q}$, де $p, q \in \mathbb{N}$ і $p < q \leqslant n$. Наприклад, $\mathcal{F}_5 = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$.

Задача 3. Нехай $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ — послідовні члени деякої послідовності Фарея. Тоді $bc - ad = 1$.

Задача 4 (Теорема Ферма-Ейлера)**.** Нехай p — просте число виду $4k - 1$. Тоді існують $a, b \in \mathbb{N}$ такі, що $p = a^2 + b^2$.
1) Згадайте, чому -1 є квадратичним лишком за модулем p.
2) Розгляньте множину $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (tx_1 + px_2)^2 < 2p\}$, де $t^2 \equiv -1 \pmod p$ та знайдіть її об'єм.

Задача 5 (Теорема Лагранжа)**.** Будь-яке $n \in \mathbb{N}$ представляється у вигляді $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, де $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
1) Покажіть, що $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(u^2 + v^2 + w^2 + t^2) = (au - bv - cw - dt)^2 + (av + bu + {} + ct - dw)^2 + (aw - bt + cu + dv)^2 + (at + bw - cv + du)^2$. Тому теорему Лагранжа достатньо довести лише для простих $p > 2$.
2) Покажіть, що якщо p — просте, то існують $a, b \in \mathbb{Z}$ такі, що $a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$.
3) Розгляньте множину $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : (px_1 + ax_3 + bx_4)^2 + (px_2 + bx_3 - ax_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 < 2p\}$ та знайдіть її об'єм (ха-ха!).

Задача 6. Нехай обмежена та опукла множина $C \subseteq \mathbb{R}^d$ симетрична відносно 0 та $\mathrm{vol}(C) > k2^d$. Тоді C містить принаймні $2k$ ненульових цілочисельних точок.

Задача 7. Середина відрізка довжини 2λ знаходиться в початку координат $\mathbb{R}^2$. Доведіть, що існує ненульова цілочисельна точка, відстань від якої до відрізка не перевищує $2(\sqrt{\lambda^2 + \pi} - \lambda)/\pi$.

Задача 8. Нехай A_r — множина усіх кругів радіуса $r > 0$ і з центром в усіх цілочисельних точках, відстань від яких до 0 не перевищує 50. Покажіть, що якщо $r < 1/\sqrt{2501}$, то існує пряма, яка проходить через 0 і не перетинає A_r. Якщо $r = 1/50$, то такої прямої не існує.