Степень точки и радикальные оси.

Повторение

На плоскости рассмотрим окружность w и точку А. Проведем через А прямую l, которая пересекает окружность w в двух точках B и C. Как известно, величина $AB \cdot AC$ не зависит от выбора прямой и равна $|d^2 - R^2|$, где d - это длина отрезка, соединяющего A с центром окружности w, R – радиус w. Чтобы проверить это равенство, нужно выбрать прямую, проходящую через А и центр окружности w, и посчитать для неё значение $AB \cdot AC$.

Число $d^2 - R^2$ называют *степенью* точки А относительно окружности w. Для точки А, лежащей вне окружности, степень равна квадрату длины касательной проведенной из А к w.

1. Рассмотрим теперь две окружности (возможно вырожденные) w_1 и w_2 с разными центрами. Докажите, что ГМТ точек, у которых степени относительно w_1 и w_2 равны – прямая, перпендикулярная линии центров этих окружности. Эта прямая называется *радикальной осью* окружностей w_1 и w_2.

2. С помощью циркуля и линейки постройте радикальную ось в случае, когда ни одна из окружностей не содержит другую (рассмотрите точки пересечения радикальной оси с общими касательными). Как построить радикальную ось точки и окружности?

3. Даны три окружности w_1, w_2 и w_3 с разными центрами. Докажите, что радикальные оси w_1 и w_2, w_2 и w_3, w_1 и w_3 пересекаются в одной точке или параллельны.

4. Из точки A проведены две прямые, одна из которых пересекает окружность w_1 в точках B и C, другая - w_2 в точках D и E. Докажите, что точки B,C, D и E лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда A принадлежит радикальной оси w_1 и w_2.

Задачи на степень точки

5. Дан правильный треугольник ABC, O – его центр. Вокруг треугольника BOC описана окружность, из точки A проведена секущая, которая пересекает эту окружность в точках D и E. Докажите, что точки B, O и середины отрезков CE и CD лежат на одной окружности.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты. Точка C_2 симметрична C относительно A_1B_1. Докажите,что H, O, C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

7.Докажите, что расстояние от инцентра треугольника ABC до центра его описанной окружности равно $\sqrt{R^2 - 2Rr}$, где R – радиус описанной окружности , r – вписанной.

Радикальные оси

8. а) В треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2 и CH_3, $H -$ ортоцентр. Докажите, что $AH \cdot HH_1 = BH \cdot HH_2 = CH \cdot HH_3$.

б) На чевианах AA_1, BB_1 и CC_1 как на диаметрах построены окружности. Докажите, что их общие хорды проходят через одну точку.

9. В треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2 и CH_3, M – произвольная точка, не принадлежащая высотам. Докажите, что описанные окружности треугольников AMH_1, BMH_2 и CMH_3 пересекаются в двух точках.

10. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. D – точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1. Докажите, что D, ортоцентр треугольника ABC и ортоцентр треугольника AB_1C_1 лежат на одной прямой.

11. H_1, H_2 и H_3 - основания высот треугольника ABC. Прямая H_2H_3 пересекает прямую BC в точке A_1. Аналогично определяются точки C_1 и B_1. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой, которая перпендикулярна прямой Эйлера треугольника ABC.

12 Дана точка P внутри треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AP пересекает касательную из точки A к описанной вокруг ABC окружности в точке A_1. Точки C_1 и B_1 определяются аналогично. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 коллинеарны.

13. Из точки A к данной окружности S проведены касательные AB и AC. На средней линии треугольника ABC, параллельной стороне BC, выбраны произвольные точки X и Y. Отрезки касательных из точек X и Y к S пересекаются в точке Z. Докажите, что четырёхугольник AXZY – описанный.

14. Продолжения медиан AK и BL пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках M и N соответственно. Докажите, что прямые KL, MN и касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке C пересекаются в одной точке либо параллельны.