Київська районна олімпіада 2012/13 н. р.
(II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики)

Умови задач

6-й клас

1. Знайдіть останню цифру числа $97531*$, якщо відомо, що воно ділиться на 6, але не ділиться на 9.

2. Прямокутники *ABCD* та *KLMN* зі сторонами $AB = 3$, $BC = 5$, $MN = 4$ та $ML = 6$ розташовані, як це показано на рис. 1. Відомо, що площа сірої частини прямокутника *ABCD* дорівнює 10. Визначте, чому дорівнює площа чорної частини прямокутника *KLMN*.

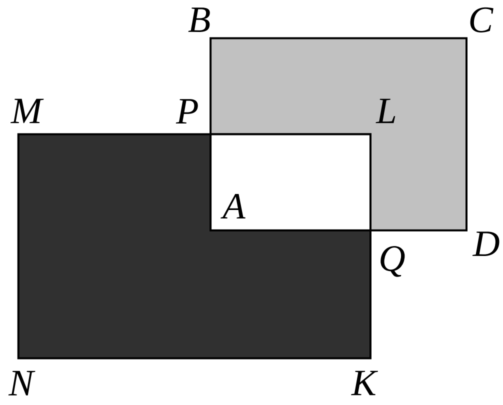

Рис. 1

3. На виборах голови першого курсу брали участь 83 студенти, кожен із яких голосував рівно за одного з чотирьох кандидатів. Головою став той, за кого було віддано найбільше (строго більше за трьох інших кандидатів) голосів. Яку найменшу кількість голосів міг набрати новий голова?

4. У комірках таблиці 3×3 записано числа, як показано на рис. 2. За один хід можна поміняти місцями пару чисел у будь-яких двох комірках, що мають спільну сторону.

а) За яку найменшу кількість ходів можна одержати таке розташування чисел, щоб у кожному стовпчику сума чисел була кратною трьом?

б) Чи можна, зробивши кілька ходів за описаними правилами, одержати таке розташування, щоб і в кожному стовпчику, і в кожному рядку таблиці сума чисел була кратною трьом?

7	2	4
5	7	7
4	1	8

Рис. 2

7-й клас

1. Обчисліть значення виразу
$$\frac{1}{2-3}-\frac{4}{5-6}+\frac{7}{8-9}-\frac{10}{11-12}+\ldots-\frac{2008}{2009-2010}+\frac{2011}{2012-2013}.$$

2. Улянка у 27 років мала трьох синів різного віку; вік кожної дитини — натуральне число. Минуло 10 років, і її вік дорівнює сумарному віку її трьох синів. Скільки років нині синам Улянки?

3. Промені *OA* та *OB* утворюють прямий кут. Петрик провів усередині цього кута промені *OC* та *OD*, кут між якими дорівнює $10°$. Виявилося, що сума найменшого та найбільшого з п'яти кутів *AOC, AOD, BOC, BOD, COD* складає $85°$. Знайдіть величини трьох кутів, на які розбивають прямий кут *AOB* промені *OC* та *OD*.

4. Знайдіть усі пари натуральних чисел *m* та *n*, які задовольняють рівність
$$5m - mn = 9n^2.$$

5. Леся розклала кілька фішок у комірки таблиці 3×3. У кожну комірку вона могла покласти одну чи кілька фішок або не покласти жодної. Далі Леся підрахувала загальну кількість фішок у кожному рядку та в кожному стовпчику таблиці. Усі шість отриманих чисел виявилися різними. Яку найменшу кількість фішок могла використати Леся?

8-й клас

1. Чи існують попарно різні числа x, y, u, v, що задовольняють пропорцію
$$(x+u):(x+v)=(y+u):(y+v)?$$

2. Знайдіть найменше натуральне число, яке ділиться на 12 і має у своєму записі цифри 3 й 4 (хоча б по одній) та лише їх.

3. На сторонах AB, BC та CA трикутника ABC вибрано відповідно точки M, N і K таким чином, щоб виконувалися умови $BM=BN$ та $CN=CK$. Знайдіть величину кута BAC, якщо $\angle MNK=40°$.

4. У кемпінгу відпочивали N туристів. На обід кожен турист з'їв половину банки супу, третину банки тушонки та чверть банки квасолі. Відомо, що загалом було з'їдено 156 банок їжі. Скільки всього туристів було у кемпінгу?

5. Чи можна розставити у 10 кружéчках на рис. 3 числа 1, 2, …, 10 (кожне число по разу) таким чином, щоб сума чисел у трьох кружечках уздовж кожного з шести відрізків була однаковою?

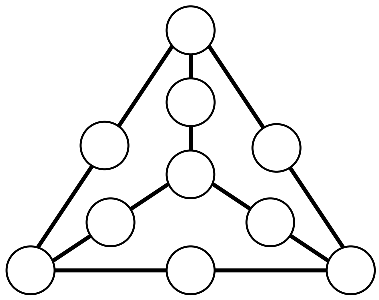

Рис. 3

9-й клас

1. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{9-x^2}\geqslant x^2+3$.

2. За умови, що попарно різні числа x, y, u, v задовольняють співвідношення
$$\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u},$$
яких значень може набувати сума $x+y+u+v$?

3. Чи існує натуральне число, добуток суми цифр якого на кількість цифр дорівнює 2012?

4. У трикутнику ABC кут BAC дорівнює $40°$, а сторони AB та AC рівні. На сторонах AB та BC трикутника вибрано точки S і T відповідно так, що $\angle BAT=\angle BCS=10°$. Прямі AT та CS перетинаються в точці P. Доведіть, що $TB=2TP$.

5. Натуральне число $n>18$ таке, що числа $n-1$ та $n+1$ прості. Доведіть, що n має принаймні вісім різних натуральних дільників.

10-й клас

1. Розв'яжіть нерівність $(x^2+1)^2-3(x^2+1)<10$.

2. Попарно різні числа a, b та c задовольняють умову $a^2(b+c)=b^2(c+a)$. Доведіть рівність $c^2(a+b)=a^2(b+c)$.

3. П'ятикутник $ABCDE$ вписаний у коло, причому $AB\parallel DE$. Доведіть, що якщо $AC^2=BD^2+CE^2$, то $\angle ABC=90°$.

4. Якого найменшого значення може набувати сума цифр натурального числа $n=(p^2+2)^2-9(p^2-7)$, де p — просте число?

5. У таблиці 3×3 розставили числа 1, 2, …, 9 (кожне число по разу) таким чином, щоб сума чисел у кожному з чотирьох квадратів 2×2 дорівнювала деякому фіксованому числу *S*. Знайдіть найбільше можливе значення *S*.

11-й клас

1. За умови, що дійсні числа x та y задовольняють рівність $\frac{x+y}{x+2y}+\frac{x-y}{x-2y}=4$, доведіть, що $x^2-y^2\neq 0$, та знайдіть множину можливих значень виразу $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

2. Знайдіть усі пари натуральних чисел m та n, які задовольняють рівність

$$4m+10n=n^2+mn+25.$$

3. На гіпотенузі *BC* прямокутного трикутника *ABC* відмітили точку *L*, відмінну від вершин *B* та *C*. Коло, описане навколо трикутника *ABL*, удруге перетинає пряму *AC* в точці *M*, а коло, описане навколо трикутника *ACL*, удруге перетинає пряму *AB* в точці *N*. Доведіть, що точки *L*, *M* та *N* лежать на одній прямій.

4. У кожній комірці таблиці 3×3 записане натуральне число, причому всі дев'ять чисел різні. Відомо, що кожне число є дільником добутку чисел, записаних у сусідніх із цим числом комірках (тобто у комірках, що мають спільну сторону з даною). Яка найбільша кількість чисел серед записаних у таблиці можуть бути простими?

5. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c\leqslant\frac{3}{2}$, знайдіть найменше можливе значення виразу $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Відповіді та розв'язання

6-й клас

1. ***Відповідь:*** 8.
Розв'язання. Сума цифр числа без урахування останньої цифри (зірочки) дорівнює 25. Щоб число ділилося на 3, треба, щоб замість зірочки стояла одна з цифр 2, 5 або 8. Якщо поставити цифру 2, то число буде кратним 9; якщо поставити 5, воно не буде ділитися на 6; якщо ж поставити цифру 8, отримане число 975 318 задовольнятиме умову задачі.

2. ***Відповідь:*** 19.
Розв'язання. Оскільки $S_{ABCD}=3\cdot 5=15$, то $S_{PLQA}=15-10=5$. Тоді площа чорної частини прямокутника *KLMN* складає $4\cdot 6-5=19$.

3. ***Відповідь:*** 22.
Розв'язання. Очевидно, що переможець повинен був набрати не менше ніж чверть від усіх голосів. Оскільки $\frac{1}{4}\cdot 83=20{,}75$, то переможець повинен був набрати не менше ніж 21 голос.

Якби переможець набрав 21 голос, то жоден з інших трьох кандидатів за умовою не міг здобути більше за 20 голосів, а тому в сумі кандидати мали б менше від $21+3\cdot 20=81<83$ голосів, чого бути не може.
А якби переможець набрав 22 голоси, а інші кандидати, наприклад, 21, 20 та 20 голосів, то загалом усі кандидати набрали б 83 голоси, тобто умова задачі виконувалася б. Отже, переможець міг набрати 22 голоси або більше.

4. ***Відповідь:*** а) 2 ходи; б) не можна.
Розв'язання. Замість самих чисел можна записати їхні остачі від ділення на 3. Після цього таблиця набуває вигляду, як на рис. 4. Тепер легко зрозуміти, що сума трьох чисел ділитиметься на 3 у тому й лише в тому випадку, якщо це три числа 1 або три числа 2.
а) Оскільки у кожному стовпчику по одному числу 2, а всі три такі числа треба зібрати в одному стовпчику, це можна зробити не менше ніж за 2 ходи — помінявши відповідні пари чисел у другому й третьому рядках. Пари чисел, які слід розміняти місцями, показано на рис. 4.
б) Зібрати три двійки водночас і в одному рядку, і в одному стовпчику неможливо.

1	2	1
2	1	1
1	1	2

Рис. 4

7-й клас

1. ***Відповідь:*** -1006.
Розв'язання. Заданий вираз можна переписати таким чином:

$$\frac{1}{2-3}-\frac{4}{5-6}+\frac{7}{8-9}-\frac{10}{11-12}+\ldots+\frac{2005}{2006-2007}-\frac{2008}{2009-2010}+\frac{2011}{2012-2013}=$$
$$=-1+4-7+10-\ldots-2005+2008-2011=$$
$$=(-1+4)+(-7+10)+\ldots+(-2005+2008)-2011=$$
$$=\underbrace{3+3+\ldots+3}_{335}-2011=1005-2011=-1006.$$

2. ***Відповідь:*** 11, 12 та 14.
Розв'язання. Нехай, коли Улянці було 27, її синам було *x*, *y* та *z* років. Тоді, виходячи з умови задачі, можемо записати таку рівність:

$$37=(x+10)+(y+10)+(z+10),\ \text{або}\ x+y+z=7.$$

Тепер треба знайти попарно різні натуральні числа *x, y, z*, сума яких дорівнює 7. Шляхом перебору легко переконатись, що єдині такі три числа — це 1, 2 і 4, тому нині синам 11, 12 і 14 років.

3. ***Відповідь:*** $10°$, $15°$, $65°$.

Розв’язання. Припустімо, найменшим із п’яти кутів є $\angle AOC$. Оскільки найбільший кут не може бути меншим за $\angle BOC$, сума найменшого та найбільшого кутів не менша за $\angle AOC + \angle BOC = 90°$, що суперечить умові задачі. З аналогічних міркувань найменшим не може бути кут $\angle BOD$. Кути $\angle AOD$ та $\angle BOC$ також не можуть бути найменшими, адже $\angle AOD > \angle AOC$ та $\angle BOC > \angle BOD$. Отже, найменшим із п’яти кутів є $\angle COD = 10°$.

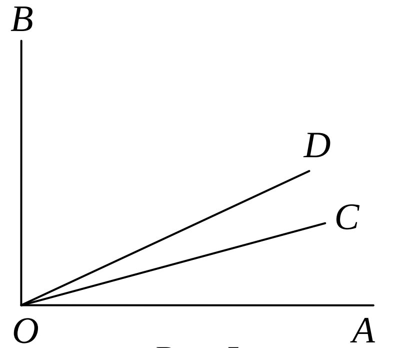

Рис. 5

Найбільшим є один із кутів $\angle AOD$ чи $\angle BOC$. Якщо, приміром, це $\angle BOC$, то за умовою $\angle BOC + \angle COD = 85°$, або (враховуючи, що $\angle BOC = \angle BOD + \angle COD$)

$$\angle BOD + 2\angle COD = 85°.$$

А звідси $\angle BOD = 65°$ та

$$\angle AOC = \angle AOB - \angle BOD - \angle COD = 90° - 65° - 10° = 15°.$$

Зрозуміло, що в такому разі кут $\angle BOC = 75°$ справді виявляється найбільшим.
Цілком аналогічним є випадок, коли найбільшим є $\angle AOD$.

4. ***Відповідь:*** $m = 12$, $n = 2$ або $m = 144$, $n = 4$.

Розв’язання. Оскільки $9n^2 > 0$, то $m(5 - n) = 9n^2 > 0$. Тож n може набувати лише одного з чотирьох значень 1, 2, 3 або 4. Залишається провести перебір:

— $n = 1 \Rightarrow 4m = 9$ — розв’язків немає.
— $n = 2 \Rightarrow 3m = 36$ — маємо розв’язок (12, 2).
— $n = 3 \Rightarrow 2m = 81$ — розв’язків немає.
— $n = 4 \Rightarrow m = 144$ — маємо розв’язок (144, 4).

5. ***Відповідь:*** 8.

Розв’язання. Якщо у Лесі було n фішок, то сума кількостей фішок у трьох рядках таблиці дорівнювала n і сума кількостей фішок у трьох стовпчиках також дорівнювала n. Сума ж усіх шести кількостей складала, відповідно, $2n$.
Шість найменших різних цілих невід’ємних чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 дають у сумі $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Отже, $2n \geqslant 15$, звідки $n \geqslant 8$. А розташувати 8 фішок так, щоб задовольнити умову задачі, справді можливо — приклад відповідного розташування показано на рис. 6.

0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**2**	**3**

Рис. 6

8-й клас

1. ***Відповідь:*** не існують.

Розв’язання. Нехай деякі чотири числа x, y, u, v задовольняють пропорцію. Тоді

$$(x + u) : (x + v) = (y + u) : (y + v) \Rightarrow (x + u)(y + v) = (x + v)(y + u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xy + xv + uy + uv = xy + xu + vy + uv \Rightarrow xv + uy = xu + vy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(v - u) + y(u - v) = 0 \Rightarrow (x - y)(v - u) = 0.$$

Таким чином, або $x = y$, або $v = u$, що суперечить умові задачі.

2. ***Відповідь:*** 3444.

Розв’язання. Щоб число ділилося на 3, воно повинно містити щонайменше три цифри 4: інакше сума його цифр не буде кратною 3. Отже, щоб задовольняти умову задачі, число повинно складатися принаймні з чотирьох цифр 3, 4, 4, 4. Найменше з таких чисел, 3444, закінчується на 44, тому ділиться на 4, а отже й на 12.

3. ***Відповідь:*** $100°$.

Розв’язання. За побудовою трикутники BMN та CNK рівнобедрені (рис. 7), тому $\angle BMN = \angle BNM = x$ та $\angle CNK = \angle CKN = y$. Тоді $x + y = \angle BNM + \angle CNK = 180° - \angle MNK = 140°$.

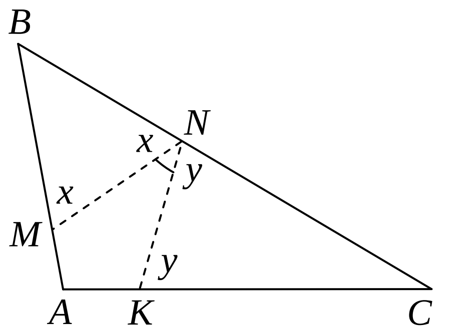

Рис. 7

Тепер, використовуючи теорему про суму кутів трикутника, можемо записати:

$$\angle BAC = 180° - \angle CBA - \angle ACB = 180° - (180° - 2x) - (180° - 2y) =$$
$$= 2(x+y) - 180° = 280° - 180° = 100°.$$

Наостанок зауважимо, що точки *M*, *N* і *K* можна вибрати з дотриманням умов $BM = BN$ та $CN = CK$ на сторонах довільного трикутника, бо за нерівністю трикутника $AB + AC > BC$. Тож якщо $\angle BAC = 100°$, то відповідні точки *M*, *N* та *K* існують і, як неважко підрахувати, скориставшись попередніми міркуваннями, $\angle MNK = 40°$.

4. ***Відповідь:*** 144.

Розв'язання. Кожен відпочивальник з'їв $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$ частини їжі у банках. Тож маємо рівність $\frac{13}{12}N = 156$, звідки $N = 12\cdot\frac{156}{13} = 144$. Залишається перевірити, що число 144 ділиться на 2, 3 і 4: це означає, що було з'їдено цілу кількість банок супу, тушонки та квасолі.

5. ***Відповідь:*** не можна.

Розв'язання. Припустімо, розставити числа потрібним чином можна. Позначимо розставлені числа, як показано на рис. 8. Нехай сума чисел уздовж кожного з відрізків дорівнює *S*, тобто

$$x + a + y = y + e + z = z + c + x =$$
$$= x + b + t = y + d + t = z + f + t = S.$$

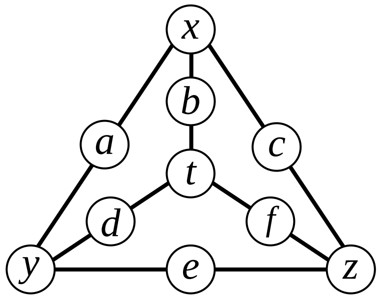

Рис. 8

Додавши шість таких сум, матимемо

$$3(x+y+z+t) + a + b + c + d + e + f = 6S.$$

З іншого боку,

$$x + y + z + t + a + b + c + d + e + f = 1 + 2 + ... + 10 = 55.$$

Віднявши одну рівність від іншої, матимемо, що $2(x+y+z+t) = 6S - 55$. Але ліва частина останнього співвідношення парна, а права частина — непарна. Дістали суперечність.

9-й клас

1. ***Відповідь:*** $x = 0$.

Розв'язання. Якщо $x = 0$, то $\sqrt{9-x^2} = 3 = x^2 + 3$ — нерівність $\sqrt{9-x^2} \geqslant x^2 + 3$ справджується. А якщо $0 < x^2 \leqslant 9$, то $\sqrt{9-x^2} < 3 < x^2 + 3$ — нерівність не справджується.

2. ***Відповідь:*** сума може набувати лише значення 0.

Розв'язання. Проведімо такі перетворення:

$$\frac{x+u}{x+v} = \frac{y+v}{y+u} \Rightarrow (x+u)(y+u) = (x+v)(y+v) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow xy + xu + uy + u^2 = xy + xv + vy + v^2 \Leftrightarrow xu + uy + u^2 = xv + vy + v^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(u-v) + y(u-v) + (u+v)(u-v) = 0 \Leftrightarrow (x+y+u+v)(u-v) = 0.$$

Оскільки за умовою числа попарно різні, то $u - v \neq 0$, отже $x + y + u + v = 0$.

З іншого боку, якщо $x + y + u + v = 0$, а також $x + v \neq 0$ та $y + u \neq 0$, то $\frac{x+u}{x+v} = \frac{y+v}{y+u}$, тому попарно різні числа *x*, *y*, *u*, *v*, що задовольняють умову задачі, існують: наприклад, 0, 1, 2 та -3.

3. ***Відповідь:*** існує.

Розв'язання. Оскільки $2012 = 4\cdot 503$, умову задовольняє, приміром, число $4\underbrace{00...0}_{502}$.

4. ***Розв'язання.*** Оскільки трикутник *ABC* рівнобедрений, $\angle ABC = \angle BCA = (180° - \angle BAC)/2 = 70°$ (рис. 9). Звідси $\angle TAC = \angle BAC - \angle BAT = 30°$, $\angle SCA = \angle BCA - \angle BCS = 60°$ і

$$\angle TPS = \angle APC = 180° - \angle TAC - \angle SCA = 90°.$$

Далі, трикутники ABT й CBS подібні за кутами $\angle ABT = \angle CBS$ та $\angle BAT = \angle BCS$. Таким чином, $\frac{AB}{BT} = \frac{CB}{BS}$, звідки $\frac{AB}{CB} = \frac{BT}{BS}$. Отже, $\Delta TBS \sim \Delta ABC$ за спільним кутом $\angle B$ та пропорційними прилеглими сторонами. Тому $\frac{TB}{TS} = \frac{AB}{AC} = 1$, тобто $TB = TS$, а $\angle BST = \angle BCA = 70°$.
А оскільки $\angle ASC = 180° - \angle BAC - \angle SCA = 80°$, то

$$\angle PST = 180° - \angle BST - \angle ASC = 30°.$$

Отже, $\frac{TP}{TB} = \frac{TP}{TS} = \sin\angle PST = \sin 30° = \frac{1}{2}$, що й треба було довести.

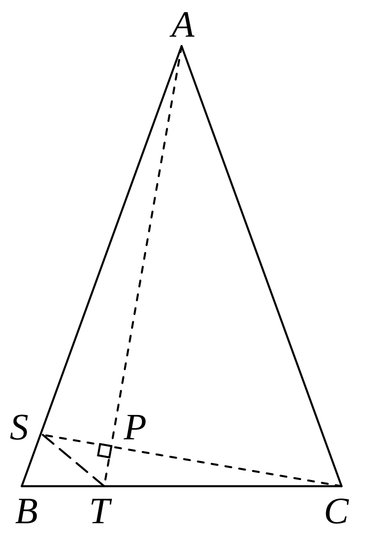

Рис. 9

5. ***Розв'язання.*** Якщо n непарне, то обидва числа $n-1$ та $n+1$ парні і, як наслідок, складені. Якщо n не ділиться на 3, то одне з чисел $n-1$ або $n+1$ кратне 3, а отже складене. Таким чином, n ділиться на 2 і на 3. Якщо n ділиться ще й на деяке просте число p, відмінне від 2 і від 3, то n має такі вісім різних натуральних дільників:

$$1, 2, 3, 6, p, 2p, 3p, 6p.$$

Хай тепер число n не має простих дільників, відмінних від 2 і 3, тобто $n = 2^m \cdot 3^k$, $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$. Якщо $m = 1$, то $k \geqslant 3$ (інакше n не буде більшим за 18). У такому випадку число n має вісім дільників

$$1, 2, 3, 2\cdot 3, 3^2, 2\cdot 3^2, 3^3, 2\cdot 3^3.$$

Якщо $k = 1$, то $m \geqslant 3$. Тоді число n має дільники

$$1, 3, 2, 3\cdot 2, 2^2, 3\cdot 2^2, 2^3, 3\cdot 2^3.$$

А у випадку, коли $m \geqslant 2$ та $k \geqslant 2$, n ділиться відразу на дев'ять різних натуральних чисел

$$1, 2, 3, 2\cdot 3, 2^2, 3^2, 3\cdot 2^2, 2\cdot 3^2, 2^2\cdot 3^2.$$

Твердження доведене.

<u>10-й клас</u>

1. ***Відповідь:*** $x \in (-2, 2)$.

Розв'язання. Уведімо позначення $t = x^2 + 1$:

$$t^2 - 3t < 10 \Leftrightarrow (t+2)(t-5) < 0 \Leftrightarrow -2 < t < 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 < x^2 + 1 < 5 \Leftrightarrow -3 < x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 2).$$

2. ***Розв'язання.*** Віднімімо від лівої частини заданого рівняння його праву частину:

$$a^2(b+c) - b^2(c+a) = a^2b - b^2a + a^2c - b^2c = ab(a-b) + c(a-b)(a+b) = (a-b)(ab+ac+bc).$$

Таким чином, $(a-b)(ab+ac+bc) = 0$, а оскільки за умовою числа попарно різні, тобто $a - b \neq 0$, то $ab+ac+bc = 0$. Скористаймося аналогічними викладками ще раз:

$$c^2(a+b) - a^2(b+c) = c^2a - a^2c + c^2b - a^2b = ac(c-a) + b(c-a)(c+a) = (c-a)(ac+bc+ab) = 0.$$

Це й доводить рівність $c^2(a+b) = a^2(b+c)$.

3. ***Розв'язання.*** Оскільки $AB \parallel DE$, справедливою є рівність $\angle EDB + \angle ABD = 180°$ (рис. 10). А з того, що чотирикутник $ABDE$ вписаний, випливає рівність $\angle EDB + \angle BAE = 180°$. Таким чином, $\angle ABD = \angle BAE$, а $ABDE$ — рівнобедрена трапеція або прямокутник, тобто $BD = AE$. Тоді, використовуючи співвідношення з умови задачі, маємо

$$AC^2 = BD^2 + CE^2 = AE^2 + CE^2.$$

З теореми, оберненої до теореми Піфагора, випливає, що трикутник AEC прямокутний, а кут AEC прямий. Тоді AC — діаметр кола, що означає, що кут ABC також прямий.

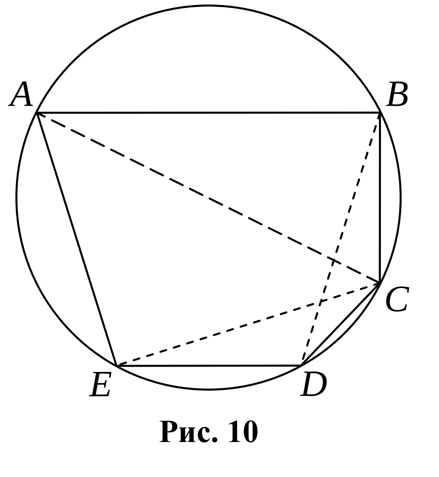

Рис. 10

4. ***Відповідь:*** 4.

Розв'язання. Якщо $p \neq 3$, то p не ділиться на 3, тому $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, звідки $p^2 + 2 \,\vdots\, 3$ та $n \equiv (p^2+2)^2 \equiv 0 \pmod 9$. Сума цифр натурального числа дає ту ж остачу від ділення на 9, що й саме число. При цьому, очевидно, сума не може дорівнювати нулю. Тому, коли $p \neq 3$, сума цифр числа n не менша за 9.

У випадку ж $p = 3$ сума цифр числа $n = (p^2+2)^2 - 9(p^2-7) = 11^2 - 18 = 103$ складає 4.

5. ***Відповідь:*** 24.

Розв'язання. Нехай числа деяким чином розставлено у квадраті 3×3 із дотриманням потрібної умови. Позначимо числа, як показано на рис. 11. Тоді

$$p + a + b + x = a + q + x + c =$$
$$= b + x + r + d = x + c + d + s = S.$$

Додавши ці чотири суми, дістанемо

$$4x + 2(a+b+c+d) + p + q + r + s = 4S.$$

У той же час

$$x + a + b + c + d + p + q + r + s = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45.$$

Віднявши одну рівність від іншої, матимемо

$$3x + (a+b+c+d) = 4S - 45.$$

Таким чином,

$$4S = 45 + 2x + (x + a + b + c + d) \leqslant 45 + 2 \cdot 9 + (9+8+7+6+5) = 98.$$

Звідси $S \leqslant 24$. При цьому значення $S = 24$ може досягатися: приклад відповідного розташування чисел наведено на рис. 12.

p	a	q
b	x	c
r	d	s

Рис. 11

4	3	5
8	9	7
1	6	2

Рис. 12

11-й клас

1. ***Відповідь:*** вираз може набувати тільки значення $\dfrac{7}{5}$.

Розв'язання. Співвідношення $\dfrac{x+y}{x+2y} + \dfrac{x-y}{x-2y} = 4$ рівносильне системі

$$\begin{cases} (x+y)(x-2y) + (x+2y)(x-y) = 4(x+2y)(x-2y), \\ x \neq \pm 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - xy - 2y^2) + (x^2 + xy - 2y^2) = 4(x^2 - 4y^2), \\ x \neq \pm 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4y^2 = 4x^2 - 16y^2, \\ x \neq \pm 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6y^2, \\ x \neq \pm 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6y^2, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Отже, $x^2 \neq y^2$, а $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \dfrac{7y^2}{5y^2} = \dfrac{7}{5}$. Крім того, числа x та y, що задовольняють систему, очевидно, існують: наприклад, $y = 1$, $x = \sqrt{6}$. Тому число $\dfrac{7}{5}$ входить до множини можливих значень виразу.

2. ***Відповідь:*** $m = 4$, $n = 3$.

Розв'язання. Рівність можна переписати таким чином:

$$4m + 10n = n^2 + mn + 25 \;\Leftrightarrow\; 4m - mn = n^2 - 10n + 25 \;\Leftrightarrow\; m(4-n) = (n-5)^2.$$

Числа m та n натуральні, а $(n-5)^2 \geqslant 0$, тому $4 - n \geqslant 0$, а n може набувати лише одного з чотирьох значень 1, 2, 3, 4:

— $n = 1 \Rightarrow 3m = 16$ — розв'язків немає.
— $n = 2 \Rightarrow 2m = 9$ — розв'язків немає.
— $n = 3 \Rightarrow m = 4$ — маємо розв'язок (4, 3).
— $n = 4 \Rightarrow 0 = 1$ — розв'язків немає.

3. ***Розв'язання.*** Незалежно від того, з якого боку від точки A лежить точка M, $\angle BAM = 90^\circ$ (рис. 13). Це значить, що BM — діаметр кола, яке містить точки A, B, L та M. Оскільки L не збігається з точками B, C і, як наслідок, з точкою M, можемо записати, що $\angle BLM = 90^\circ$. Аналогічно $\angle CLN = 90^\circ$.
Таким чином, точки M та N лежать на перпендикулярі до прямої BC, проведеному з точки L, тобто ці три точки лежать на одній прямій.

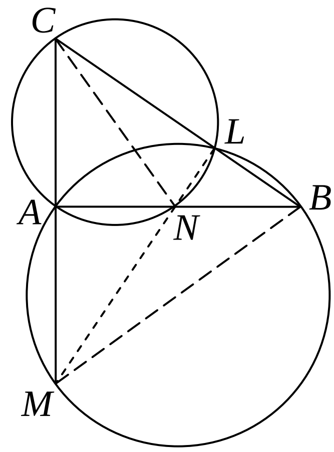

Рис. 13

4. ***Відповідь:*** 6.
Розв'язання. Припустимо спершу, що простими можуть виявитися 7 чисел, а не будуть простими, відповідно, щонайбільше 2 числа.
Позначимо записані у комірках таблиці числа, як показано на рис. 14. Просте число не може бути дільником добутку кількох інших простих чисел, тому не станеться такого, щоб у комірці та всіх сусідніх із нею комірках було записано тільки прості числа. Застосувавши це міркування до лівої верхньої комірки таблиці, одержимо, що одне з чисел a, b, d не є простим. Застосувавши те ж міркування до правої верхньої комірки, матимемо, що одне з чисел b, c, f не є простим. Нарешті, застосувавши міркування до комірки з числом h, дістанемо, що не є простим хоча б одне з чисел e, g, h, i.
Припущення, що число b просте, відразу веде до суперечності, адже тоді мали би принаймні 3 непростих числа: по одному в комірках a, d, у комірках c, f та в комірках e, g, h, i.
Отже, число b непросте. Але з аналогічних міркувань, застосованих для чисел d, f та h у симетричних комірках, випливатиме, що ці числа також не є простими. Тож маємо відразу 4 непростих числа, що також веде до суперечності.
Залишається навести приклад таблиці із шістьма простими числами, яка задовольняла б умову задачі. Такий приклад наведено на рис. 15: a, b, c, g, h, i на рисунку — довільні 6 різних простих чисел, а ag, bh та ci — добутки відповідних пар чисел.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Рис. 14

a	b	c
ag	bh	ci
g	h	i

Рис. 15

5. ***Відповідь:*** $\frac{15}{2}$.

Розв'язання. Проведімо низку перетворень:

$$S = a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \left(a+b+c+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 6\cdot\sqrt[6]{a\cdot b\cdot c\cdot\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{4b}\cdot\frac{1}{4c}}+\frac{3}{4}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = 3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geqslant 3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{(a+b+c)/3} \geqslant \frac{15}{2}.$$

А значення $\frac{15}{2}$ досягається, якщо $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Зауважимо, що безпосереднє застосування нерівності між середніми до суми S дає оцінку $S \geqslant 6$, але значення 6 сума набувати не може.