6-й Київський турнір математичних боїв імені Лесі Рубльової

Математичний бій № 1

Старша ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. На кожній з 6 граней куба проведено одну з двох діагоналей. Нехай N – кількість пар з проведених діагоналей, які містять спільну вершину (кожна діагональ розглядається у кожній різній невпорядкованій парі). Знайти найбільше та найменше можливі значення для N.

   Відповідь: максимум $N = 12$ та мінімум $N = 4$.

   Розв'язання. На рис.1 та 2 наведені приклади, коли $N = 12$ та $N = 4$. Покажемо, що це шукані екстремуми. Куб має 8 вершин, а діагоналей проведено 6, тому ми маємо 12 точок, які є кінцями проведених діагоналей (кінцеві точки). З кожної вершини може виходити з проведених 0, 1, 2 чи 3 діагоналі. Таким чином для кожної вершини ми маємо у таких випадках 0, 0, 1 чи 3 різні пари діагоналей. Припустимо, що можливий мінімум $N \leq 3$. Якщо є вершина з 3 діагоналями, то з кожної іншої вершини повинна виходити максимум 1 діагональ, тобто усього кінцевих точок для діагоналей було б $1 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 10 < 12$ – суперечність. Таким чином немає вершин, з яких виходить 3 діагоналі і взагалі щонайбільше 3 вершини мають спільні діагоналі. Тоді кінцевих точок щонайбільше $3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11 < 12$, що також неможливо. Таким чином доведено, що $N \geq 4$.

   Усього є $C_6^2 = 15$ різних пар з цих 6 проведених діагоналей. Але жодні дві діагоналі з протилежних граней не можуть перетинатись, тому максимальне можливе значення для $N = 12$. Твердження доведене.

2. Числа 1, 2, ..., 20 записані на дошці. Боб може вибрати довільні два числа, якщо вони відрізняються принаймні на 2, збільшити менше з двох чисел на 1 та одночасно більше з двох чисел зменшити на 1. Після цього нові два числа записуються на дошку замість обраних двох чисел. Яку найбільшу кількість таких операцій може зробити Боб за такими правилами?

   Відповідь: 330 операцій.

   Розв'язання. Зрозуміло, що сума чисел не змінюється внаслідок подібних операцій, а тепер подивимось, як змінюється сума квадратів цих чисел. При виборі чисел $m > n$, де $m - n \geq 2$, він запише числа $(m-1)$ та $(n+1)$, при цьому $(m-1)^2 + (n+1)^2 = m^2 + n^2 + 2 - 2(m-n) \leq m^2 + n^2 - 2$. Рівність можлива лише за умови, що числа відрізняються рівно на 2. Не можна більше зробити операцію, якщо усі числа відрізняються максимум на 1, тому повинно залишитись наприкінці 10 чисел рівних 10 та 10 чисел рівних 11. Для початкової множини сума квадратів складає $1^2 + 2^2 + \ldots + 20^2 = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 2870$. Наприкінці – $10 \cdot \left(10^2 + 11^2\right) = 2210$, таким чином максимальне можливе кількість перетворень чисел $\frac{2870-2210}{2} = 330$.

   Покажемо, що таку кількість операцій дійсно можна зробити:

1 група перетворень: $(1,3) \xrightarrow{(2,2)} (2,4) \xrightarrow{(3,3)} (3,5) \xrightarrow{(4,4)} \ldots \xrightarrow{(17,17)} (17,19) \xrightarrow{(18,18)} (18,20) \xrightarrow{(19,19)}$ (18 операцій) при цьому ми одержали таку групу чисел: $(2,2,3,4,5,\ldots,17,18,19,19)$.

2 група перетворень: $(2,4) \xrightarrow{(3,3)} (3,5) \xrightarrow{(4,4)} (4,6) \xrightarrow{(5,5)} \ldots \xrightarrow{(16,16)} (16,18) \xrightarrow{(17,17)} (17,19) \xrightarrow{(18,18)}$ (16 операцій) при цьому ми одержали таку групу чисел: $(2,3,3,4,5,\ldots,17,18,18,19)$.

3 група перетворень: $(2,4) \xrightarrow{(3,3)} (3,5) \xrightarrow{(4,4)} (4,6) \xrightarrow{(5,5)} \ldots \xrightarrow{(16,16)} (16,18) \xrightarrow{(17,17)} (17,19) \xrightarrow{(18,18)}$ (16 операцій) при цьому ми одержали таку групу чисел: $(3,3,3,4,5,\ldots,17,18,18,18)$.

4 група перетворень: $(3,5) \xrightarrow{(4,4)} (4,6) \xrightarrow{(5,5)} (5,7) \xrightarrow{(6,6)} \ldots \xrightarrow{(15,15)} (15,17) \xrightarrow{(16,16)} (16,18) \xrightarrow{(17,17)} (17,19) \xrightarrow{(18,18)}$ (14 операцій) при цьому ми одержали таку групу чисел: $(3,3,4,4,5,\ldots,17,17,18,18)$.

5, 6 групи перетворень: $(3,5) \xrightarrow{(4,4)} (4,6) \xrightarrow{(5,5)} (5,7) \xrightarrow{(6,6)} \ldots \xrightarrow{(15,15)} (15,17) \xrightarrow{(16,16)} (16,18) \xrightarrow{(17,17)} (17,19) \xrightarrow{(18,18)}$ (по 14 операцій) при цьому ми одержали таку групу чисел: $(4,4,4,4,5,\ldots,17,17,17,17)$.

Як неважко зрозуміти цей процес можна продовжити і одержимо, що загалом буде така кількість операцій: $18 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 9 = 330$, що й треба було довести.

3. Натуральні числа a, b, c такі, що числа $\frac{bc}{b+c}$, $\frac{ac}{a+c}$, $\frac{ab}{a+b}$ також цілі. Довести, що $(a,b,c) > 1$ (НСД трьох чисел).

   Розв'язання. З умов задачі випливає, що цілими є також число $a - \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2}{a+b}$. Аналогічно цілими є й число $\frac{a^2}{a+c}$. Таким чином обидва числа $(a+b)$ та $(a+c)$ ділять число a^2, тому $[a+b, a+c] \le a^2$ (НСК). Але з відомої формули $(a+b, a+c)[a+b, a+c] = (a+b)(a+c) > a^2$ випливає, що $\frac{(a+b)(a+c)}{[a+b,a+c]} > 1$. Таким чином існує простий дільник p, який ділить і $a+b$ і $a+c$. Але $(a+b)|a^2 \Rightarrow p|a$, але тоді $p|b$ та $p|c$, $\Rightarrow p|(a,b,c)$ що й треба було довести.

4. Легко навести приклад трьох різних натуральних чисел сума кубів яких дорівнює кубу натурального числа. Чи існують 2009 попарно різних натуральних чисел $a_1, a_2, ..., a_{2009}$ та натуральне число b такі, що $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{2009}^3 = b^3$?

   Відповідь: так.

   Розв'язання. Почнемо з прикладів трьох чисел: $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$. Помножимо цю рівність на 9^3: $\left(1^3 + 6^3 + 8^3\right) \cdot 9^3 = 9^3 \cdot 9^3 \Leftrightarrow \left(9^3 + 54^3 + 72^3 = 81^3\right)$, звідки одержимо, що $\left(1^3 + 6^3 + 8^3 + 54^3 + 72^3 = 81^3\right)$ – куб подано у вигляді суми п'яти різних кубів натуральних чисел. Далі аналогічно, знову помножимо цю рівність на 9^3 і аналогічним чином одержимо вже подання через суму 7 кубів різних натуральних чисел: $\left(1^3 + 6^3 + 8^3 + 54^3 + 72^3 = 81^3\right) \cdot 9^3 = 81^3 \cdot 9^3 \Leftrightarrow 9^3 + 54^3 + 72^3 + 486^3 + 648^3 = 729^3$ або $1^3 + 6^3 + 8^3 + 54^3 + 72^3 + 486^3 + 648^3 = 729^3$

і так далі, кожного разу додається по 2 доданки, при цьому усі вони різні за побудовою.

5. Нехай $f_k(x) = \frac{1}{k}\left(\sin^k x + \cos^k x\right)$. Знайдіть усі натуральні числа m та n, $m \neq n$, такі, що функція $f_m(x) - f_n(x)$ є сталою.

<u>***Відповідь***</u>: $(4;6)$ та $(6;4)$.

<u>***Розв'язання***</u>. Нехай $m < n$ і $f_m(x) - f_n(x) = c$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Покладемо в останній рівності $x = 0$ та $x = \pi$, що дає $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = c$ та $\frac{(-1)^m}{m} - \frac{(-1)^n}{n} = c$, звідки знаходимо, що обидва числа m та n мають бути парними. Нехай $m = 2p$ та $n = 2q$. Підставимо у рівняння $x = \frac{\pi}{4}$ та отримаємо

$$\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} = c = \frac{1}{p2^p} - \frac{1}{q2^q}. \tag{1}$$

Якщо $p = 1$, то з (1) знаходимо $q = 1$. Тоді $m = n = 2$, що протиричіть $m \neq n$. Тобто $p \geq 2$ і (1) можна переписати як $q2^q(2^p - 2) = p2^p(2^q - 2)$. Нехай $q = p + k$, де $k > 0$. Тоді

$$k2^k(2^p - 2) = (2^{k+1} - 2)p. \tag{2}$$

Так як $k \cdot 2^k \geq 2^{k+1} - 2$, то має виконуватись $p \geq 2^p - 2$. Але при $p \geq 3$ має місце $2^p - 2 > p$, отже залишається розглянути єдиний випадок $p = 2$. Тоді з (2) випливає $k2^k = 2^{k+1} - 2$, тобто $k = 1$. Отже $q = 3$ і знаходимо єдину можливу пару $m = 4$ та $n = 6$.

Залишилось перевірити, що ця пара підходить. Дійсно, маємо

$$f_4(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{2},$$

$$f_6(x) = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + cos^4 x)}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{2},$$

отже $f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$.

6. Нехай натуральне $n \geq 3$, дійсні числа $a_1, a_2, ..., a_n$ задовольняють умову $\min\limits_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| = 1$. Знайти найменше можливе значення суми $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^3$.

<u>***Відповідь***</u>: $\frac{1}{32}(n^2-1)^2$ для непарного n, та $\frac{1}{32}n^2(n^2-2)$ для парного n.

<u>***Розв'язання***</u>. Без обмеження загальності вважаємо, що $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Бачимо, що $\forall k = \overline{1,n}$ $|a_k| + |a_{m-k+1}| \geq |a_{m-k+1} - a_k| \geq |n+1-2k|$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^3 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^3 + |a_{n+1-k}|^3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k| + |a_{n+1-k}|\right)\left(\frac{3}{4}\left(|a_k| - |a_{n+1-k}|\right)^2 + \frac{1}{4}\left(|a_k| + |a_{n+1-k}|\right)^2\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k| + |a_{n+1-k}|\right)^3 \geq \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3$$

.

Якщо n – непарне, то $\sum\limits_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3 = 2\cdot 2^3 \cdot \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^3 = \frac{1}{4}(n^2-1)^2$.

Якщо n – парне, то $\sum\limits_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3 = 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}}(2i-1)^3 = 2\left(\sum\limits_{j=1}^{n} j^3 - \sum\limits_{j=1}^{\frac{n}{2}}(2j)^3\right) = \frac{1}{4}n^2(n^2-2)$.

Таким чином $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^3 \geq \frac{1}{32}(n^2-1)^2$ для непарного n, та $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^3 \geq \frac{1}{32}n^2(n^2-2)$ для парного n.

Рівність досягається, коли $a_i = i - \frac{1}{2}(n+1)$, $i = \overline{1,n}$.

7. У рівнобедреному трикутнику ABC з вершиною A вписане коло з центром у точці I дотикається до сторін BC, CA, AB у точках D, E, F відповідно. На дузі $\cup EF$, що не містить точку D вибрана точка P. Пряма BP перетинає вписане коло у точці $Q \neq Q$, а прямі EP, EQ перетинають пряму BC у точках M, N відповідно. довести, що:

   а) P, F, B, M – циклічні;

   б) $\frac{EM}{EN} = \frac{BD}{BP}$.

   <u>Розв'язання</u>. ***а)*** Цей пункт випливає з таких умов: $EF \parallel BC \Rightarrow \angle ABC = \angle AFE = \angle AFP + \angle PFE = \angle PEF + \angle PFE = 180^\circ - \angle FPE$ (рис.3) звідки усі й випливає.

   б) З теореми синусів та пункту ***а)*** задачі, маємо: $\frac{EM}{EN} = \frac{\sin\angle ENM}{\sin\angle ENM} = \frac{\sin\angle FEN}{\sin(180^\circ - \angle PFB)} = \frac{\sin\angle FPB}{\sin\angle PFB} = \frac{BF}{BP}$, оскільки $BF = BD$ маємо шукане.

8. У трикутнику ABC проведені медіана AM та бісектриса BK, $L = AM \cap BK$. Відомі дві сторони триктуника $AB = c > BC = a$. Знаючи, що центр описаного кола навколо ΔABC лежить на прямій CL, знайти довжину AC.

   <u>Відповідь</u>: $b^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - ac + \sqrt{(a^2+c^2-ac)^2 + 4ac(a^2-c^2)}\right)$.

   <u>Розв'язання</u>. Позначимо кути $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, O – центр описаного кола, тоді $\angle LCB = 90^\circ - \alpha$, $\angle LCA = 90^\circ - \beta$. Нехай $\angle CAM = x$, $\angle BAM = y$, скористаємось теоремою синусів: $\frac{CM}{AC} = \frac{\sin x}{\sin\angle AMC}$, $\frac{BM}{AB} = \frac{\sin y}{\sin\angle AMB} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin x}{\sin y}$ тоді з теореми Чеви у синусах для прямих CO, AM та BK: $\frac{\sin x}{\sin y}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\cdot\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ-\beta)} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. З теореми косинусів для ΔABC ми запишемо $\cos\alpha$ та $\cos\beta$ через сторони a, b, c, підставимо ці вирази у останню рівність і одержимо біквадратне рівняння для знаходження шуканої довжини сторони $AC = b$: $b^4 - b^2(a^2+c^2-ac) - ac(a^2-c^2) = 0$, звідки й одержимо відповідь.

Старша ліга
Група Б
Умови та розв'язки

1. Чи можливо розфарбувати клітинки дошки розміром $n \times n$ у 2 кольори таким чином, щоб будь-які 4 клітини, що стоять на перетині довільних 2 різних стовпчиків та 2 різних рядків, не були пофарбовані в один колір, якщо

   а) $n = 4$;

   б) $n = 5$?

   <u>Відповідь</u>: а) можна; ***б)*** ні.

   <u>Розв'язання</u>. ***а)*** Одне з можливих розфарбувань наведено на рис.5.

   б) Припустимо, що існує потрібне розфарбування. Серед п'яти клітин першого рядку принаймні три пофарбовано в один колір, нехай – у чорний (рис.6). Розглянемо лише частину таблиці з трьох стовпчиків, перша клітинка яких пофарбована у чорний колір.

   Серед трьох полів у одному рядку ніякі 2 не можуть бути пофарбовані у чорний колір (інакше з'являться 4 чорних клітини на перетині 2 рядків та 2 стовпчиків). Отже, принаймні 2 клітини з 3 у кожному рядку пофарбовано у білий колір. Але існує максимум 3 різних розташування 2 білих клітин (вони відмічені на рис.7 жовтим). Так як усього рядків 4, то в деяких двох рядках позиція пар білих клітинок має співпасти, тобто знову отримуються 4 білих клітини на перетині 2 рядків та 2 стовпчиків. Приходимо до протиріччя.

2. Маємо 6 червоних та по 3 синіх і жовтих куль. Усі однокольорові кулі абсолютно однакові. Скількома способами ці кулі можна розташувати у одну лінію таким чином, щоб кулі одного кольору не стояли поруч?

   <u>Відповідь</u>: 100.

   <u>Розв'язання</u>. Є 6 червоних та 6 нечервоних куль. У першому варіанті, коли між кожними двома червоними повинна лежати одна нечервона куля. У такому випадку для жовтих і синіх куль можливе будь-яке розташування. Якщо найлівіша куля червона, то далі маємо $C_6^3 = 20$ варіантів. Аналогічно, якщо най правіша куля червона. Таким чином маємо 40 варіантів.

   У іншому випадку, коли дві нечеровні кулі розташовані поруч, то розташування червоних куль однозначне. Ліва та права кулі – червоні, далі спочатку вибираємо 5 варіантів для розташування пари нечеровних, там вони ще 2 способами можуть бути розташовані всередині цієї пари. Далі з решти чотирьох місць вибираємо $C_4^2 = 6$ для жовтих. Загалом маємо 60 варіантів.

   Таким чином разом маємо 100 варіантів.

3. Нехай x, y, z – цілі числа, що задовольняють рівність:

$$yx^2 + (y^2 - z^2)x + y(y - z)^2 = 0.$$

а) Довести, що число xy є повним квадратом.

б) Довести, що існує нескінченно багато трійок (x, y, z), які задовольняють цю рівність.

Розв'язання. *а)* Це очевидно, якщо $x = y$. Припустимо, що $x \neq y$. Перепишемо це рівняння як квадратне відносно змінної z: $(y-x)z^2-2y^2z+y(y^2+x^2+xy) = 0$ $\Rightarrow$ його дискримінант $D = xy \cdot (2x)^2$, звідки все й випливає.

б) Достатньо показати, що $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ трійка чисел $x = a^2(a + b)$, $y = b^2(a + b)$ та $z = (a^2 + ab + b^2)b$ задовольняє задане рівняння.

4. Задача № 4 старшої ліги групи А.

5. Задача № 5 старшої ліги групи А.

6. Для довільних додатних a, b, c довести нерівність:

$$\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Розв'язання. $\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)b(b+c)c(c+a)a}} = \frac{3}{\sqrt[3]{((a+b)c)((b+c)a)((c+a)b)}} \geq$ $\geq \frac{3}{\frac{(a+b)c+)b+c)a+(c+a)b}{3}} = \frac{9}{2(ab+bc+ca)}$, що й треба було довести.

7. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з вершиною в точці C, A' – основа висоти, що проведена з вершини A. Довести, що якщо $CA' = \frac{1}{2}AB$, то трикутник ABC – рівносторонній.

Розв'язання. Проведемо як на рисунку висоту AC', тоді $AC' = C'B = \frac{1}{2}AB = CA'$. Тоді трикутники ABA' та CBC' правильні та подібні (рис.8). Тому можемо записати відношення: $\frac{AB}{BA'} = \frac{CB}{BC'}$. Нехай $AB = c$, $TBA' = x$, тоді маємо таке рівняння: $\frac{c}{x} = \frac{\frac{c}{2}+x}{\frac{c}{2}} \Rightarrow 2x^2 + cx - x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}c$, тому $BC = AC = AB = c$, що й треба було довести.

8. Задача № 8 старшої ліги групи А.

Середня ліга
Група А

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старшої ліги групи Б.

2. Задача № 2 старшої ліги групи А.

3. Задача № 3 старшої ліги групи Б.

4. Задача № 4 старшої ліги групи Б.

5. Операція $*$ на $\mathbb{R}$ визначається такими умовами:

   1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ існує єдине $x \in \mathbb{R}$: $x * a = b$ (будемо записувати $x = b/a$);

   2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ виконується рівність $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$.

   а) Чи обов'язково виконується рівність $a * b = b * a$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$?

   б) Довести, що $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ справджуються рівності: $(a/b)/c = (a/c)/(b/c)$ та $(a/b) * c = (a * c)/(b * c)$.

   Відповідь: ***а)*** не обов'язково.

   Розв'язання. ***а)*** В якості прикладу розглянемо таку операцію: $a*b = a$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

   б) З умов задачі, якщо позначити $x * b = a \Leftrightarrow x = a/b$, звідси стає зрозумілим, що виконується рівність $(a/b) * b = a$.

   Тоді ми маємо: $(a/b) * c = (a * c)/(b * c) \Leftrightarrow ((a/b) * c) * (b * c) = (a * c)$ але ж $((a/b) * c) * (b * c) = ((a/b) * b) * c)(a * c)$, тобто друга рівність доведена.

   Для доведення першої рівності визначимо $k = a/b$, $l = k/c$, $m = a/c$, $n = b/c$, тоді за умовою $k * b = a$, $l * c = a$, $m * c = a$, $n * c = b$. Тоді $m * c = a = k * b = (l * c) * (m * c) = (l * n) * c$, тобто $(l * n) * c = m * c = a \Rightarrow l * m = n = a/c \Rightarrow l = m/n$ або $(a/b)/c = (a/c)/(b/c)$, що й треба було довести.

6. Задача № 6 старшої ліги групи Б.

7. Задача № 7 старшої ліги групи А.

8. Задача № 8 старшої ліги групи А.

Середня ліга
Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старшої ліги групи Б.

2. Задача № 2 старшої ліги групи Б.

3. Задача № 4 старшої ліги групи Б.

4. Знайти найменше трицифрове число, яке має таку властивість: число, яке утричі більше за цього має лише парні цифри у своєму десятковому запису

   Відповідь: 134.

   Розв'язання. Позначимо шукане число через $\overline{abc}$, тоді число, що містить усі парні цифри має вигляд: $3 \cdot \overline{abc} = (3a) \cdot 100 + (3b) \cdot 10 + 3c$. Найменше можливе значення для $a = 1$, тому для парності першої цифри необхідно мати умову $(3b) \cdot 10 + 3c \geq 100$, звідки маємо $10b + c \geq \frac{100}{3}$, тобто $10b + c \geq 34$ і число 134 як раз і задовольняє шукану умову.

5. Знайти чисельне значення виразу $f_{n+2}^4 - f_n f_{n+1} f_{n+3} f_{n+4}$, якщо (f_n) – це послідовність Фібоначчі, тобто $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   <u>Відповідь</u>: 1.

   <u>Розв'язання</u>. Є відома тотожність Кассіні: $f_{n+1}f_{n+3} = (-1)^{n+2} + f_{n+2}^2$. Оскільки $f_n f_{n+4} = (f_{n+2} - f_{n+1})(f_{n+2} + f_{n+3}) = f_{n+2}^2 + (f_{n+3} - f_{n+1}) f_{n+2} - f_{n+1} f_{n+3} = 2f_{n+2}^2 - f_{n+1}f_{n+3} == f_{n+2}^2 - (-1)^{n+2}$, то $f_{n+2}^4 - f_n f_{n+1} f_{n+3} f_{n+4} = f_{n+2}^4 - (f_{n+1}f_{n+3})(f_n f_{n+4}) = = f_{n+2}^4 - \left(f_{n+2}^2 + (-1)^{n+2}\right)\left(f_{n+2}^2 - (-1)^{n+2}\right) = (-1)^{2n+4} = 1$.

6. Для додатних чисел x, y довести нерівність: $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy$.

   <u>Розв'язання</u>. Зробимо послідовно такі перетворення: $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 \geq (x^4 + 1) + (y^3 + y) + x^2 \geq 3x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{6}xy > \frac{9}{2}xy$.

7. Задача № 7 старшої ліги групи Б.

8. Нехай D така точка на стороні AB гострокутного трикутника ABC, що трикутник BCD також гострокутний. Позначимо ортоцентр ΔBCD через H. Довести, що якщо точки A, D, H, C циклічні, то ΔABC рівнобедрений.

   <u>Розв'язання</u>. Проведемо як на рис.9 висоти CE та DF у $\triangle BCD$. Їх перетин – це точка H. Нехай $\angle BAC = \alpha$. Якщо точки A, D, H, C циклічні, то $\angle DHC = \pi - \alpha$, тоді $\angle DHE = \alpha$, як суміжний кут з $T\angle DHC$. Тоді з $\triangle DHE$ $\angle HDB = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, і з $\triangle DFB$ $\angle ABC = \alpha$, що й треба було довести.

Молодша ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старшої ліги групи Б.

2. Задача № 2 старшої ліги групи Б.

3. Задача № 4 старшої ліги групи Б.

4. Задані натуральні числа $a_1, a_2, ..., a_n$, припустимо що для деякого натурального числа $k < n$ справджується умова: якщо вибрати будь-які k серед заданих n чисел, то їх сума ділиться на n. Довести тоді, що й сума $a_1 + a_2 + ... + a_n$ також ділиться на n.

   <u>Розв'язання</u>. Для $k = 1$ доведення очевидне, кожне число ділиться на n. Нехай тепер $1 < k < n$. Розглянемо два різних елементи a_i, a_j, тепер серед решти елементів $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \setminus \{a_i, a_j\}$ виберемо довільну підмножину S, яка складається з $(k-1)$ елементу. Тоді розглянемо два набори, що містять по k елементів: $S \cup \{a_i\}$ та $S \cup \{a_j\}$. Сума членів кожного з цих наборів кратна n, тому і їх різниця так само кратна n, тобто $(a_i - a_j) \,\vdots\, n$ для довільних a_i, a_j, тобто $a_i \equiv a \pmod{n}$, тому $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv na \equiv 0 \pmod{n}$, що й треба було довести.

5. Якщо a – парне натуральне число та число $A = a^n + a^{n-1} + ... + a + 1$ при деякому $n \in \mathbb{N}$ є повним квадратом. Довести, що $a \,\vdots\, 8$.

   Розв'язання. Оскільки A – непарне, то воно може бути квадратом лише непарного числа, тому $A = (2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$, оскільки $k(k+1) \,\vdots\, 2$, то $A = 8r+1$ $\Rightarrow A-1 = a^n + a^{n-1} + \ldots + a = 8r$, але це означає, що $8 \mid a(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$, але число $(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$ – непарне, тому $8 \mid a$, що й треба було довести.

6. Відомо, що для цілих a, b число $a^2 + 2b$ є повним квадратом. Довести, що число $a^2 + b$ є сумою двох квадратів.

   Розв'язання. Нехай $a^2 + 2b = m^2$, тоді $b = \frac{m^2 - a^2}{2} \Rightarrow$ числа m та a мають однакову парність, тому $a^2 + b = a^2 + \frac{m^2-a^2}{2} = \frac{m^2+a^2}{2} = \left(\frac{m+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-a}{2}\right)^2$ – сума квадратів двох цілих чисел.

7. Задача № 8 старшої ліги групи Б.

8. Чи існує опуклий п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ та точка X всередині цього п'ятикутника така, що виконуються умови: $XA_i = A_{i+2}A_{i+3}\ \forall i = \overline{1,5}$ (індекси розглядаються за модулем 5).

   Відповідь: так, існують.

   Розв'язання. Побудуємо квадрат $A_1A_2A_3A_4$, всередині цього квадрату виберемо точку X таким чином, щоб ΔA_1XA_4 був рівностороннім, і нехай точка A_5 зовні квадрату така, що $\triangle A_2A_3X = \triangle A_1A_4A_5$ з повною відповідністю вершин одна іншій (рис.10). Простою перевіркою переконуємось, що побудований п'ятикутник шуканий.

Молодша ліга
Група Б
Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старшої ліги групи Б.

2. Два пірати ділять купу діамантів загальною вагою S, відомо, що найбільший з діамантів важить M. Вони ділять усю купу на дві менші купки вагою S_1 та S_2, де $S_1 \le S_2$, а потім жеребом вирішать, кому яка дістанеться. Доведіть, що:

   а) $S_1 \le S - M$;

   б) пірати можуть таким чином поділити купу, щоб $S_1 \ge \frac{1}{2}(S - M)$.

   Розв'язання. ***а)*** Зрозуміло, що $S_2 \ge M$. Дійсно, якщо $M \in S_2$, то це очевидно, якщо ж $M \in S_1$, то $S_2 \ge S_1 \ge M$. Тому $S = S_2 + S_1 \ge M + S_1$, що й треба було довести.

   б) Для усіх можливих розбиттів на дві купки, що відповідають умовам, виберемо таке, для якого величина меншою суми найбільша. Нехай це S_1^0. Припустимо, що умова задачі не виконується, тобто $S_1^0 < \frac{1}{2}(S - M)$. Виберемо довільний діамант вагою a з купки $S_2^0 = S - S_1^0$. Нехай $S_1^1 = S_1^0 + a$, $S_2^1 = S_2^0 - a$. Оскільки $S_1^1 > S_1^0$, то за побудовою S_1^0 випливає, що $S_2^1 \le S_1^1$, а також $S_2^1 \le S_1^0$ тоді з нашого припущення маємо: $S = S_1^1 + S_1^2 = S_1^0 + a + S_2^1 \le 2S_1^0 + a < S - M + a \le S$ і одержана суперечність завершує доведення.

3. Задача № 4 середньої ліги групи Б.

4. Задача № 4 молодшої ліги групи А.

5. Задача № 5 молодшої ліги групи А.

6. Задача № 6 молодшої ліги групи А.

7. Задача № 8 середньої ліги групи Б.

8. Задача № 8 молодшої ліги групи А.