Разные задачи -2

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Задача 1. *Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_C и B_C, прямые AA_C и BB_C пересекаются в C_1. Точки A_1, B_1 определяются аналогично. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке Лемуана, а описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности ABC.*

Задача 2. *Дан треугольник ABC такой, что $AB - BC = AC/\sqrt{2}$. Пусть M — середина стороны AC, а N — основание биссектрисы угла B. Докажите, что $\angle BMC + \angle BNC = 90^\circ$.*

Задача 3. *Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r, O, I — центры этих окружностей. Внешняя биссектриса угла C пересекает AB в точке P. Q — проекция P на прямую OI. Найдите расстояние OQ.*

Задача 4. *В треугольник ABC вписан ромб $CKLN$ так, что точка L лежит на стороне AB, точка N — на стороне AC, K — на стороне BC. Пусть O_1, O_2, O — центры описанных окружностей треугольников ACL, BCL и ABC соответственно. Пусть P — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ANL, BKL. Докажите, что точки O_1, O_2, P, O лежат на одной окружности.*

Задача 5. *В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан, I — центр вписанной окружности, A_1, B_1 — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC, G — точка пересечения AA_1 и BB_1. Докажите, что $\angle CGI$ прямой тогда и только тогда, когда $GM \parallel AB$.*