Домашнее задание 23.11.13

1 Старое.

1. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, которые удовлетворяют
$$(P(x))^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x).$$

2. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

3. Для положительных чисел A, B и действительных $a_1, a_2, \dots a_n$, $b_1, b_2, \dots b_n$ для которых выполняется $A^2 > a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ и $B^2 > b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$ докажите неравенство
$$(A^2 - a_1^2 - \dots - a_n^2)(B^2 - b_1^2 - \dots - b_n^2) \leq (AB - a_1b_1 - \dots - a_nb_n)^2.$$

4. Для положительных чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ докажите неравенство
$$(a_1b_1c_1 + \dots + a_nb_nc_n)^3 \leq (a_1^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + \dots + c_n^3).$$

2 Новое

1. Найдите все совершенные числа n такие, что числа $n+1$ и $n-1$ — простые.

2. Найдите все соврешенны числа, которые делятся на 3, но не делятся на 9.

3. а) Пусть $q = 2^p - 1$ простое при каком-то натуральном p. Докажите, что число $N = q \cdot 2^{p-1}$ — совершенное;

   б) Пусть n - четное совершенное число, и степень вхождения двойки в разложение n на простые множители равна k. Докажите, что все нечетные простые делители n должны быть больше, чем 2^k;

   в) Докажите, что любое четное совершенное число можно представить в виде $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, где $2^p - 1$ — простое

4. Найдите все пары целых чисел a, b таких что числа
$$\frac{a^3b - 1}{a+1}, \frac{b^3a + 1}{b-1}$$
   целые.

5. Найдите все простые p и натуральные x, y такие, что
$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p.$$

6. Для некоторого натурального n оказалось, что число
$$\frac{8^n + n}{2^n + n}$$
   целое. Докажите, что $n < 10$.

7. Обозначим $d(k)$ количество всех делителей числа k. Найдите все натуральные числа n, что

$$d(n)^3 = 4n.$$

8. Пускай числа a и n взаимно просты, а $i_1, i_2, \dots i_\phi(n)$ — числа взаимно простые и меньшие n. Докажите, что остатки при делении на n у чисел $ai_1, ai_2, \dots ai_{\phi(n)}$ различны и выведите теорему Ейлера

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 (\mod n)$$